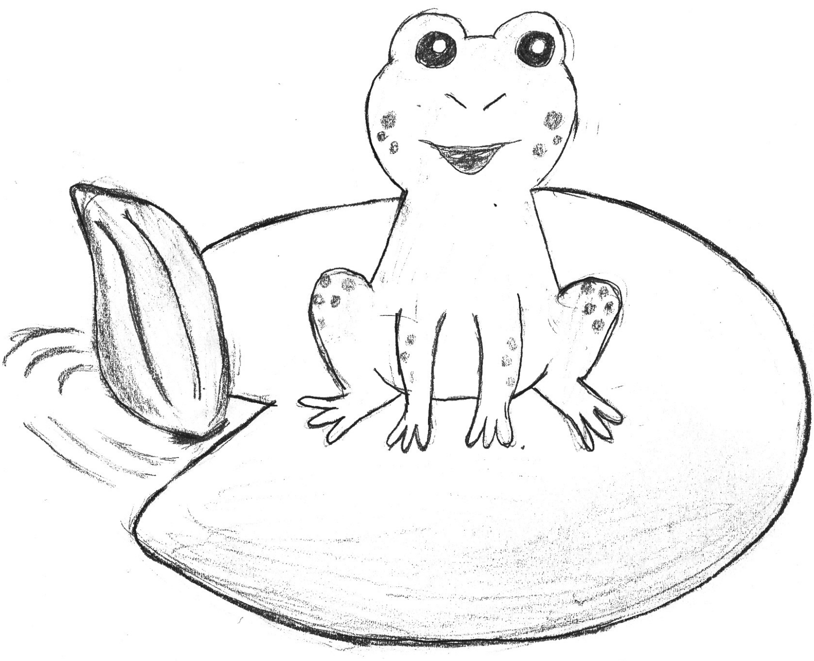
MALYNÁR

Číslo 6 — Ročník 27 malynar.strom.sk



Ahojte!

Koniec školského roka už klope na dvere, no ešte pred ním tu pre vás máme vaše opravené riešenia, spolu s časopisom, v ktorom nájdete vzorové riešenia aj poradie. Tí najlepší z vás sa môžu tešiť na letné sústredenie – týždeň plný zábavy, radosti a matematiky.

Vaši milovaní vedúci MALYNÁRa

Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra

1

opravovali **Viki Brezinová** a **Jano Richnavský**
najkrajšie riešenie: Richard Vodička

74 riešení

Zadanie

27 vojakov bolo ubytovaných v izbách s tromi alebo štyrmi lôžkami, jazdci zvlášť a pešiaci zvlášť. Nájdite všetky možnosti, ako mohli byť vojaci do izieb rozdelení, keď boli všetky izby obsadené úplne. Trojlôžkových izieb bolo obsadených viac ako štvorlôžkových, pričom štvorlôžková izba bola obsadená aspoň jedna. Jazdcov bolo aspoň 10 a pešiakov bolo viac ako jazdcov.

Riešenie

Vieme, že bola obsadená aspoň jedna štvorlôžková izba. Ak by bola obsadená práve jedna, zvyšní vojaci by museli byť ubytovaní v trojlôžkových izbách. V trojlôžkových izbách by ich bolo $27-1\cdot 4=23$, čo nie je deliteľné číslom 3, teda zvyšných nevieme ubytovať len do trojlôžkových izieb, lebo musia byť obsadené úplne. Štvorlôžkové izby sú teda aspoň dve. $27-2\cdot 4=19$ vojakov do trojlôžkových izieb ubytovať však nie je možné. Ak by boli štvorlôžkové izby tri, do trojlôžkových musíme ubytovať $27-3\cdot 4=15$ vojakov, čo už vieme. Ďalším zvýšením počtu štvorlôžkových izieb prídeme na to, že podmienke deliteľnosti vyhovuje už len šesť štvorlôžkových a jedna trojlôžková izba. To ale k riešeniu nevedie, pretože trojlôžkových izieb je viac. Preto boli štvorlôžkové izby tri.
Jazdcov bolo aspoň 10, súčet počtov jazdcov a pešiakov bol 27, teda pešiakov mohlo byť najviac $27-10=17$. Najmenší možný počet pešiakov je 14. Vtedy by bolo medzi vojakmi $27-14=13$ jazdcov, čo je najväčší možný počet jazdcov. Menej pešiakov by už porušilo podmienku v zadaní, lebo by ich muselo byť menej ako jazdcov.
Jazdci a pešiaci sú ubytovaní oddelene. Budeme preto riešiť problém, do akých izieb dokážeme rozdeliť konkrétny počet od 10 do 13 jazdcov alebo od 14 do 17 pešiakov. Takýto počet musí vzniknúť ako súčet trojok a štvoriek. Máme tri štvorlôžkové izby, preto pri vypĺňovaní tabuliek budeme pri každom z čísel skúšať, či ho dokážeme dosiahnuť za pomoci žiadnych až troch štvorlôžkových izieb.

	0	1	2	3
10	×	3,3,4	×	×
11	×	×	3,4,4	×
12	3,3,3,3	×	×	4,4,4
13	×	3,3,3,4	×	×

	0	1	2	3
17	×	×	3,3,3,4,4	×
16	×	3,3,3,3,4	×	×
15	3,3,3,3,3	×	×	3,4,4,4
14	×	×	3,3,4,4	×

Riadky tabuliek po poradí zodpovedajú možnostiam pre počty jazdcov a pešiakov. Prvá možnosť – 10 jazdcov a 17 pešiakov – predstavuje prvý riadok v oboch tabuľkách atď. Stĺpec určuje počet štvorlôžkových izieb. V oknách tabuľky sú vypísané spôsoby, ktorými vieme vyjadriť príslušné počty vojakov ako súčty počtov lôžok v izbách.

Znak $\times$ znamená, že daný počet sa vyskladať nedá. Pri každej z možností potrebujeme overiť, či budú vojaci ubytovaní spolu v troch štvorlôžkových a piatich trojlôžkových izbách. Pri lepšom pohľade do tabuľky vidíme, že v treťom riadku to dokážeme dvomi spôsobmi a v každom ďalšom riadku jedným. Možností, ako mohli byť rozdelení do izieb, je preto 5.

Komentár

Mnoho riešiteľov si zvolilo cestu vypisovania možností. Táto metóda je účinná len vtedy, keď overíte absolútne všetky možnosti, ku ktorým môže dôjsť. Ak ste na čo i len jednu zabudli, stratili ste niekoľko bodov, okrem toho môže byť vypisovanie všetkých možností niekedy vyčerpávajúce. Sme radi, že sa našli riešitelia, ktorí išli na úlohu nejakým logickým postupom, či už tým uvedeným v riešení, alebo akýmkoľvek iným, v ktorom sa nepoužívalo vypisovanie možností.

2

opravovali **Matej „Mimi“ Hanus** a **Samo Krajči**

najkrajšie riešenie: Michal Iľkovič

82 riešení

Zadanie

Súčet trojciferného čísla $\overline{AAA}$ a dvojciferného čísla $\overline{BB}$ je číslo $\overline{CD6E}$. A, B, C, D a E sú rôzne cifry. Zistite, aké hodnoty majú A, B, C, D a E.

Riešenie

Pozrime sa na miesta jednotiek. Buď tam dochádza prechod cez desiatku, alebo nie. Ak prechod cez desiatku nenastáva, inými slovami $A+B$ je menej ako 10, tak na mieste jednotiek vidíme, že $A+B=E$, na mieste desiatok je $A+B=6$ a na mieste stovák vidíme, že $A+0=D$ (pretože tam nie je žiaden zvyšok z miesta desiatok). No jasne vidíme, že $A=D$, čo je v rozpore so zadaním.
Teda na mieste jednotiek musí dochádzať k prechodu cez desiatku, a teda $A+B$ je viac ako 10 (a samozrejme najviac 18, pretože sčítavame dve jednociferné čísla). To znamená, že na mieste desiatok máme súčet $A+B$ a ešte sa zo súčtu na mieste jednotiek zvýši 1. Zo zadania vieme, že vo výsledku je na mieste desiatok 6, a, keďže pri súčte $A+B$ dochádza k prechodu cez desiatku, tak $A+B+1=16$, teda $A+B=15$. To znamená, že máme iba 4 možnosti pre A a B: 9 a 6, 8 a 7, 7 a 8, 6 a 9. Tieto možnosti si vieme už úplne jednoducho vyskúšať:

A	B	$\overline{AAA}+\overline{BB}$
9	6	1065
8	7	965
7	8	865
6	9	765

Teda jednotlivé písmená predstavujú takéto hodnoty:

A	B	C	D	E	vyhovuje
9	6	1	0	5	áno
8	7	0	9	5	áno
7	8	0	8	5	nie
6	9	0	7	5	áno

Vyhovujú všetky možnosti okrem tretej, kde $B = D$, čo je v rozpore so zadaním.

Komentár

V zadaní sa píše, že prvé číslo je trojciferné a druhé je dvojciferné, teda je jasné, že A a B nemôžu byť nuly. O treťom čísle sa však nič nepíše, teda C a D pokojne môžu byť nuly. V diskusii pri príklade však nastala chyba na našej strane, kde sme na otázku, či môže byť C nula, odpovedali „nie“. Ako píšeme aj vyššie, zadanie túto možnosť nijako nezakazuje. Pre túto, našu, chybu, sme však uznávali aj riešenia, ktoré predpokladali, že C nie je nula.

Ak sme však predpokladali, že C nemôže byť nula, tak bolo pomerne jednoduché si uvedomiť, že A musí byť 9, aby nám po sčítaní trojciferného čísla s dvojciferným vzniklo štvorciferné, a potom sme mohli použiť podobnú úvahu s prechodom cez desiatku ako vo vyššie popísanom riešení alebo iba jednoducho vyskúšať tých osem možností, čo môže byť B.

3

opravovali **Florián Hatala** a **Paťo Paľovčík**

najkrajšie riešenia: Katarína Chabová,

72 riešení

Zadanie

Vojislav ukladá kamienky na niektoré políčka tabuľky 3×3 (na jednom políčku môže byť aj viac kamienkov). Potom si spočíta počet kamienkov v každom zo stĺpcov aj riadkov. Chce ich uložiť tak, aby bol každý z týchto šiestich súčtov iný. Koľko najmenej kamienkov musí použiť? Ako napríklad ich môže poukladať?

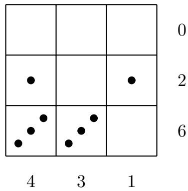
Riešenie

Vždy, keď do tabuľky umiestnime kamienok, bude umiestnený v nejakom stĺpci a zároveň riadku. Preto *celkový súčet* všetkých počtov kamienkov v riadkoch aj stĺpcoch bude dvakrát väčší oproti skutočnému počtu kamienkov v tabuľke.

Hľadáme takú tabuľku, v ktorej je počet kamienkov v každom riadku a každom stĺpci iný. Tabuľka má 3 riadky a 3 stĺpce, čiže je v nej 6 rôznych počtov. Najmenšie možné rôzne počty sú 0, 1, 2, 3, 4 a 5. Tieto počty dávajú *celkový súčet* 15. *Celkový súčet* ale má byť dvakrát väčší ako počet kamienkov v tabuľke. 15 však nie je násobok čísla 2, a preto nevyhovuje.

Skúsime druhý najmenší *celkový súčet*, čo je 16. Vieme ho dosiahnuť počtami 0, 1, 2, 3, 4 a 6.

Ak sa nám podarí nájsť rozloženie 8 kamienkov (polovice *celkového súčtu* počtov) také, aby počty v riadkoch a stĺpcoch boli rôzne, našli sme riešenie. Poľahky nájdeme napríklad (čísla mimo mriežky sú súčty na príslušných stĺpcoch a riadkoch):



Komentár

Zopár z vás si neuvedomilo, že na niektorých políčkach nemusí byť kamienok ani jeden. Iní síce našli riešenie na 8 kamienkov, no nedokázali zdôvodniť, prečo je tento počet kamienkov najmenší možný.

4

opravovali **Lenka Hake** a **Tomáš Kocák**

najkrajšie riešenia: Eva Krajčiová

63 riešení

Zadanie

Rozhodnite, na koľko najmenej rezov viete cukrový kváder $10 \times 8 \times 5$ rozplíliť, aby ste z neho mali kocky $1 \times 1 \times 1$. Jedným rezom viete rozpíliť súčasne aj viac oddelených telies.

Riešenie

V prvom rade si treba uvedomiť, že, ak máme veľa kvádrov a každý z nich chceme rozrezať nejakým rezom, stačí nám ich naukladať vedľa seba tak, aby rezy na seba nadväzovali, a môžeme ich rozrezať naraz. To ide stále. Preto nie je nevyhnutné popisovať, ako presne sme kvádre usporiadali, potrebné je popísať, ako režeme jednotlivé kvádre. Teraz si predstavme situáciu, že sme rozrezali jeden kváder na dva rôzne kvádre. Máme dve možnosti pre to, čo sa mohlo stať:

- **Oba kvádre sú rovnakej veľkosti.** V tomto prípade potrebujeme na rozrezanie obidvoch kvádrov rovnaký počet rezov.

- **Jeden z kvádrov je väčší.** V tomto prípade sa kvádre líšia len v jednom rozmere, v tom, ktorý sme rozrezali, a menší kváder sa musí dať rozrezať na rovnaký alebo menší počet rezov ako ten väčší kváder. Jednoduchý dôvod je taký, že na menší z kvádrov prilepíme priesvitné kocky tak, aby vznikol väčší z kvádrov, a potom ich už režeme naraz. Na konci priesvitné kocky odstránime.

Preto sa nám stačí stále pozerať len na väčší z kvádrov, ten menší sa rozreže popri ňom. Naším cieľom teraz bude v každom kroku odrezať časť kvádra tak, aby bolo splnené:

- Po každom reze nám musí nám ostať aspoň polovica kvádra.
- Na konci musí ostať kváder $1 \times 1 \times 1$.
- Chceme čo najmenej rezov.

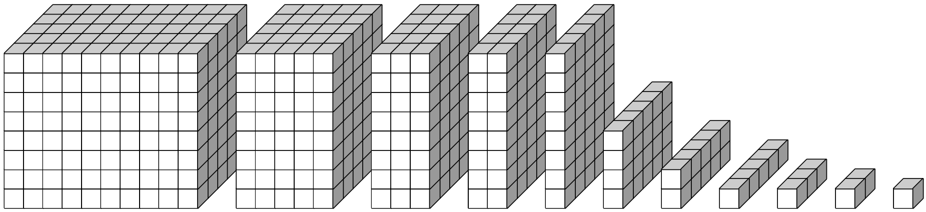
Teraz sa pozrime, čo sa stane po jednom takomto reze. Ako sme už spomenuli, kváder sa zmenil len v jednom smere. Napríklad odrezaním kvádra $2 \times 8 \times 5$ z kvádra $10 \times 8 \times 5$ dostaneme kváder $8 \times 8 \times 5$, ktorý sa líši len v prvom rozmere. Jeden krok zmenší len jeden rozmer. Preto je jedno, či smery, v ktorých režeme, striedame. Môžeme bez problémov rezať tak, že najskôr zmenšíme jeden rozmer na 1 a potom sa zameriame na iný rozmer.

Poďme teda zistiť, koľko potrebujeme rezov na to, aby sme zmenšili každý z rozmerov na 1. Pozrime sa najskôr na stranu dĺžky 10 a poďme od konca. Na konci máme stranu dĺžky 1. V predposlednom kroku mohla mať strana len dĺžku 2. V kroku predtým mohla mať strana dĺžku 3 alebo 4. V treťom kroku od konca mohla mať strana dĺžku 4 až 8. V štvrtom kroku od konca mohla mať strana dĺžku 5 až 16. Teda potrebujeme aspoň 4 kroky na to, aby sme zmenšili stranu dĺžky 10 na 1. Všimnime si teraz, že ak pridáme jeden krok, maximálna dĺžka strany sa zdvojnásobí:

- Na 1 krok vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 2.
- Na 2 kroky vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 4.
- Na 3 kroky vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 8.
- Na 4 kroky vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 16.
- Na 5 kroky vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 32.
- Na 6 kroky vieme rozrezať maximálne stranu dĺžky 64.
- ...

Preto na stranu dĺžky 10 potrebujeme aspoň 4 rezy. Rovnako dostaneme, že na stranu dĺžky 8 potrebujeme aspoň 3 rezy a na stranu dĺžky 5 potrebujeme aspoň 3 rezy. Spolu potrebujeme aspoň 10 rezov na to, aby sme sa dostali od kvádra $10 \times 8 \times 5$ ku kvádru $1 \times 1 \times 1$. Zistili sme teda, že potrebujeme aspoň 10 rezov. Už nám stačí len ukázať, že to na 10 rezov aj vieme urobiť.

Pôvodný kváder budeme rezať tak, že najskôr rozrežeme štyrikrát stranu dĺžky 10, potom trikrát stranu dĺžky 8 a nakoniec trikrát stranu dĺžky 5. Po každom reze sa pozrieme len na väčší z kvádrov, ktoré sme dostali, keďže menší vieme určite rozrezať na rovnaký alebo menší počet rezov. Takto dostaneme postupnosť kvádrov ako na obrázku.



Komentár

Keby sme časti kvádra po jednotlivých rezoch nemohli presúvať, potrebovali by sme na rozpílenie strán dĺžky 10, 8 a 5 po poradí aspoň 9 rezov, 7 a 4. Spolu 20 rezov, čo bol veľmi častý, ale chybný výsledok, vzhľadom na to, že sme časti kvádra presúvať mohli. Veľa riešení obsahovalo správny príklad pílenia kvádra na 10 rezov, ale chýbal v nich dôkaz, že 9 alebo ešte menej rezov nestačí, teda, že 10 je minimum. O niečo lepšie boli riešenia popisujúce, že na rozpílenie strán dĺžky 10, 8 a 5 potrebujeme po poradí aspoň 4, 3 a 3 rezy, a teda spolu aspoň 10 rezov. Avšak v jednom reze nemusíme u každého telesa píliť rovnaký rozmer. Niektoré telesá môžeme otočiť a píliť tak viacero rôznych rozmerov naraz. Týmto spôsobom teda môžeme riešiť, len ak ukážeme, že pílenie rôznych rozmerov naraz nám žiadne rezy neušetrí.

5 opravovali **Klára „Kel“ Hricová** a **Roman Staňo**

najkrajšie riešenie: Martin Dudjak

51 riešení

Zadanie

Chceme z 25 pretekárov vybrať 3 najrýchlejších, ale nemáme stopky. Na okruhu môže naraz súťažiť maximálne 5 pretekárov. Každý pretekár prejde okruh vždy za rovnaký čas. Rozhodnite, či môžeme určiť:

a) najrýchlejšieho pretekára počas šiestich kôl,
b) druhého najrýchlejšieho pretekára počas siedmich kôl,
c) tretieho najrýchlejšieho pretekára počas ôsmich kôl.

Ak na daný počet kôl nie sme schopní daného pretekára určiť, napíšte aj, prečo to nie je možné. Podobne, ak to možné je, napíšte, ako.

Máme pre vás aj bonusovú podúlohu, ktorá nebude hodnotená bodmi, no za jej správne vyriešenie môžete získať sladkú odmenu: Rozhodnite, či môžeme určiť tretieho najrýchlejšieho pretekára počas siedmich kôl. Nezabudnite poriadne zdôvodniť, prečo to nie je respektíve je možné.

Riešenie

a) Rozdelíme si pretekárov náhodne do 5 skupín po 5 pretekárov, necháme ich súťažiť. Máme za sebou 5 kôl, ktoré budeme označovať ako *základné*. Do 6. kola vyberieme víťazov, teda najrýchlejších pretekárov základných 5 kôl. Ten, kto vyhrá 6. kolo, je celkový víťaz. Je totiž rýchlejší ako tí štyria, s ktorými pretekal v základnom kole, a zároveň rýchlejší ako všetci zo 6. kola, ktorí sú určite rýchlejší ako ich súperi v základných kolách.

b) Prvých 6 kôl usporiadame ako v časti a). Druhý najrýchlejší celkovo môže byť pretekár, ktorý skončil v 6. kole druhý. Je určite rýchlejší ako nasledujúci traja zo 6. kola, a teda aj ako tí, s ktorými súťažili v prvých 5 kolách. Zároveň je druhý bežec 6. kola rýchlejší ako všetci bežci v jeho základnom kole. Zatiaľ vieme len o jednom bežcovi, čo prekonal druhého v 6. kole, a to bežec, o ktorom už z a) vieme, že je najrýchlejší. Musíme si ale uvedomiť, že druhý najrýchlejší bežec celkovo mohol bežať s najrýchlejším v základnom kole. V takom prípade by druhý najrýchlejší nemal šancu dostať sa do 6. kola. Šancu na druhú pozíciu už nikto iný nemá. V 7. kole tak necháme súťažiť bežca, ktorý bol v 6. kole druhý, a bežca, ktorý sa umiestnil v základnom kole hneď za najrýchlejším bežcom vôbec. Víťaz 7. kola je nutne druhý najrýchlejší.

c) Prvých 7 kôl zorganizujeme ako v b). Zostavu pre 8. kolo vyberáme na základe výsledkov zo 7. kola:

- Ak celkovo druhý skončil pretekár zo základnej skupiny, kde bol celkový víťaz, do 8. kola posielame ďalšieho pretekára z tejto skupiny (teda tretieho v poradí), spolu s pretekárom, ktorý skončil v 6. kole ako druhý. Opäť, stačí sa zamyslieť nad tým, o ktorom bežcovi vieme, že zatiaľ sú len dvaja lepší – v tomto prípade je to druhý bežec 6. kola. Kto ešte má šancu ho prekonať? Podobnou úvahou ako v časti b) zistíme, že jedine tretí súťažiaci základnej skupiny absolútne najrýchlejšieho bežca. Rýchlejší z nich sa preto stáva tretím najrýchlejším pretekárom.

- Ak celkovo druhý skončil pretekár z inej základnej skupiny ako celkový víťaz, do 8. kola sa dostáva zvyšný bežec zo 7. kola spolu s pretekárom, ktorý v základnom kole skončil druhý za druhým celkovo najrýchlejším. Rýchlejší z nich sa stáva tretím najrýchlejším pretekárom. Zdôvodnenie je rovnaké ako v predchádzajúcom bode.

Bonus

Prvých 6 kôl sa bude konať ako v časti a). Druhým a tretím najrýchlejšími pretekármi určite nebude nikto z pretekárov, ktorí skončili v 6. kole poslední a predposlední, keďže sú pomalší ako minimálne traja pretekári. Nerátame ani s pretekármi, ktorí s nimi súťažili v základných kolách, keďže sú od nich pomalší. Víťaz 6. kola už nemôže byť tretí najrýchlejší, keďže je víťaz celkovo. Do úvahy pripadajú pretekári, ktorí skončili za celkovým víťazom ako druhý a tretí v základnom kole, aj tí, ktorí na týchto miestach skončili v 6. kole. Ešte je tu jeden pretekár, a to ten, čo súťažil a skončil druhý v základnom kole, ktoré vyhral pretekár, ktorý skončil druhý v 6. kole. Do 7. kola teda posielame 5 pretekárov, výsledok nám jednoznačne určí druhého a tretieho najrýchlejšieho pretekára.

Komentár

Ak nájdete riešenie úlohy, nikdy nestačí len jednoducho prehlásiť: „Toto je riešenie." Vždy je nutné poriadne vysvetliť, prečo je riešenie jediné správne, a, ako ste sa k nemu vlastne dostali. Ak vám také vysvetlenie chýba alebo nie je dostatočné, strhávame vám body. Inak tomu nebolo ani v tejto úlohe, kde bolo najväčšou chybou riešení nedostatočné objasnenie toho, prečo práve vami zvolený výber pretekárov vedie k určeniu troch najrýchlejších bežcov.

6 opravovali **Roman Staňo**

najkrajšie riešenia: Alenka Bálintová, Eva Krajčiová

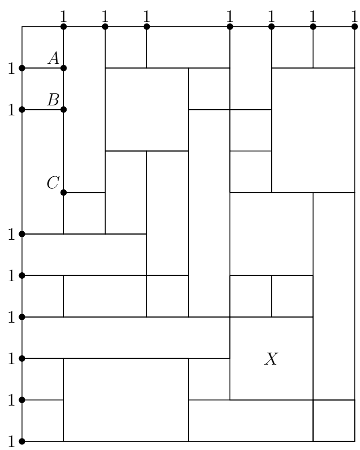
45 riešení

Zadanie

Na obrázku je mapa lesných ciest. Kôň Rafał je v ohraničenej časti lesa (označenej písmenom X). Koľkými rôznymi spôsobmi sa vie dostať Svorad z ľavého horného rohu lesa k Rafałovi, ak bude chodiť po cestách len smerom nadol alebo napravo? K Rafałovi sa dostane, ak bude na križovatke ciest susediacej s časťou lesa, kde je Rafał. Keď sa raz dostane k Rafałovi, zastane a ďalej už nejde.

Riešenie

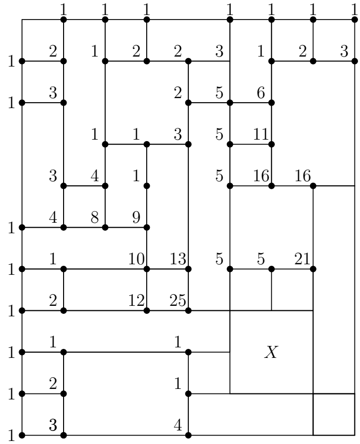
Venujme najprv pozornosť len tým križovatkám, ktoré ležia na hornej a ľavej hranici lesa. Na každú z týchto križovatiek sa vieme dostať len jediným spôsobom, a to pohybom po hranici lesa. Napríklad do križovatky v pravom hornom rohu lesa sa vieme dostať iba tak, že pôjdeme celý čas doprava. Ak by sme niekedy zabočili nadol, nachádzali by sme sa pod úrovňou nášho cieľa a pohyb nahor máme zo zadania zakázaný. Do pravej hornej križovatky by sme sa tak už nemali šancu dostať. Podobnú úvahu je možné vykonať pre všetky križovatky hornej a ľavej hranice lesa. Dopíšme si ku každej z týchto križovatiek číslo 1, ktoré nám vyjadruje počet možností, ktorými sa vieme na danú križovatku



obr. 1

dostať. Pozrime sa ďalej na križovatky, ktoré sme na obrázku (obr. 1) označili ako A, B a C. Na križovatku A vieme vkročiť len z križovatky, ktorá je bezprostredne nad ňou, a križovatky, ktorá je bezprostredne vľavo od nej.

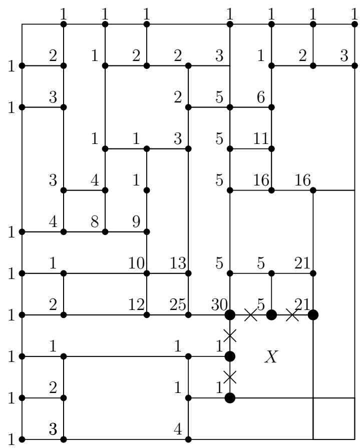
Spočítajme počet možností, ktorými sa vieme dostať na A zvlášť z každej z týchto križovatiek (uvedomme si, že každá cesta do A nutne vedie cez jednu z týchto križovatiek). Zhora sa vieme do A dostať presne toľkými možnosťami, koľkými do križovatky nad A. Ku každej z týchto možností totiž stačí pridať jeden pohyb dolu a sme v A. Koľkými možnosťami sa vieme dostať na A zľava? Rovnakou úvahou zistíme, že počet týchto možností je rovnaký ako celkový počet možností, ktorými sa z počiatku vieme dostať na križovatku vľavo od A. Počet možností, ktorými vieme prísť na A je preto súčtom počtov možností, ktorými sa vieme dostať na križovatky bezprostredne naľavo a hore od A. Bude to konkrétne $1+1=2$.



obr. 2

Pozrime sa ďalej na bod B. Zopakujme úvahu z križovatky A a zistíme, že na B sa vieme dostať len z križovatky naľavo a z A. Počet možností preto bude súčtom možností z týchto dvoch križovatiek,
a to $1+2=3$.

Bod C je však odlišný – vieme sa naň dostať len z jednej križovatky (B). To ale znamená, že každá cesta, ktorou sa vieme dostať do C, musí prechádzať cez B, a teda do C sa vieme dostať presne toľkými možnosťami, koľkými sa vieme dostať aj do B. Vieme preto, že
$C = B = 3$. Ostáva nám len postupne prechádzať križovatky a dopĺňať si do nich počty možností ako súčty počtov možností z križovatiek naľavo a hore. Týmto postupom zrejme vieme vyplniť celú mriežku (obr. 2). Uvedomme si ešte jednu vec – cestami, ktoré obkolesujú Rafałovu časť lesa sa nedá prechádzať. Tieto cesty totiž spájajú také križovatky, na ktoré keď vstúpime, naša trasa končí, a teda už sa ďalej nepohybujeme. Táto skutočnosť je zrejme rovnaká, ako keby dané cesty ani vôbec neexistovali. Ak ich z mapy vyškrtneme, poľahky vieme zistiť, koľkými možnosťami sa dá dostať do cieľov – križovatiek, označených



obr. 3

väčším kruhom (obr. 3). Ostáva zrátať možnosti pre jednotlivé body. Spolu dostávame $1 + 1 + 30 + 5 + 21 = 58$ možností.

Komentár

Trikový postup v tomto riešení mnohým uľahčil cestu k výsledku. Podobné riešenie si však vyžaduje dôkladné vysvetlenie, ktoré v mnohých riešeniach (už tradične) chýbalo. Zložitejšie to mali tí, ktorí sa rozhodli všetky možnosti zaradom vypisovať. Pri takom veľkom počte možností sa môžeme ľahko stratiť alebo napísať jednu možnosť viackrát. Čo je však väčší problém, je to, že aj po vypísaní všetkých ciest musíme ešte dokázať, že možnosti sú skutočne všetky a žiadna nechýba.

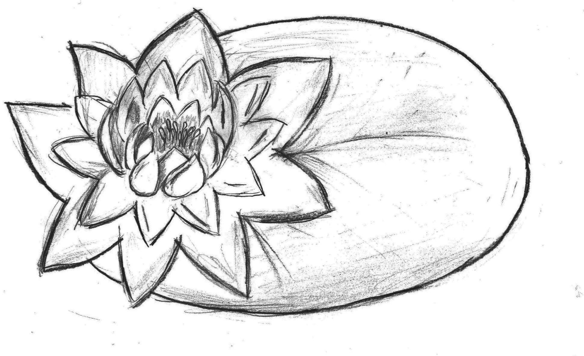
Autori vzorových riešení: Florián Hatala, Tomáš Babej, Roman Staňo, Jakub Genči, Zuzana Ontkovičová

Konečné poradie letného semestra 27. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Eva Krajčiová	Z5	ZBe16KE	54	9	9	9	8	9	9	**108**
2. - 3.	Lucia Chladná	Z6	GAMČABA	54	9	9	9	7	9	9	**106**
	Richard Vodička	Z6	GAlejKE	54	9	9	9	9	7	9	**106**
4.	Michal Iľkovič	Z6	ZBPPGPO	54	6	9	9	7	9	9	**103**
5. - 6.	Milan Jozef Pokorný	Z5	ZAKubTT	54	6	9	9	3	9	9	**102**
	Richard Prikler	Z4	ZVažePO	51	6	9	9	-	9	9	**102**
7.	Natália Tkáčová	Z5	ZLevoSN	54	7	9	7	3	9	7	**100**
8. - 9.	Martina Osuska	Z4	ZDrJDMA	52	9	6	9	3	9	5	**99**
	Michal Vodička	Z4	ZBe16KE	52	9	6	9	-	9	5	**99**
10. - 11.	Alex Fabrici	Z6	ZPAngKE	48	8	9	9	5	9	9	**97**
	Veronika Vodičková	Z6	GAlejKE	48	9	6	8	8	9	9	**97**
12.	Alenka Bálintová	Z4	ZGaštZA	48	6	6	9	-	9	9	**96**
13. - 14.	Teo Gertler	Z4	ZKošiBA	54	8	8	9	0	-	7	**95**
	Paulína Tkáčová	Z6	ZLevoSN	47	9	9	9	5	9	7	**95**
15.	Katarína Farbulová	Z6	GAlejKE	54	6	9	9	2	7	4	**91**
16.	Patrik Barnišin	Z6	ZBPPGPO	48	6	9	9	0	9	9	**90**
17.	Marek Horváth	Z6	GKonšPO	51	7	6	9	4	9	3	**89**
18.	Barbora Cimráková	Z4	ZGaštZA	39	9	9	9	3	-	8	**86**
19.	Ľudmila Krupová	Z5	ZSCaMKE	41	5	9	9	3	7	9	**85**
20. - 21.	Michal Ferdinandy	Z4	ZPoliKE	43	6	6	5	0	9	6	**84**
	Natália Poliačiková	Z6	ZKro4KE	46	8	9	9	0	7	5	**84**
22. - 23.	Katarína Chabová	Z5	ZLNovKE	52	5	6	9	3	5	-	**83**
	Ondrej Králik	Z6	GAlejKE	51	9	9	9	0	0	5	**83**
24. - 25.	Ondrej Tóth	Z4	ZHôrky	44	7	6	7	-	9	-	**82**
	Lukáš Jacko	Z6	ZKro4KE	48	3	9	8	3	6	5	**82**
26.	Radovan Milián	Z5	ZKro4KE	45	8	6	4	0	7	7	**81**
27.	Tomáš Hazucha	Z6	GMMHLM	47	2	9	9	3	-	4	**74**
28.	Jakub Filek	Z5	ZBytča	50	6	6	5	0	5	-	**72**
29.	Martin Dudjak	Z6	SMládPP	41	7	3	9	3	5	3	**71**
30.	Jakub Čaník	Z5	ZPožiKE	49	5	2	4	3	5	-	**70**
31.	Matej Vojtaník	Z6	ZKro4KE	34	8	9	6	3	4	5	**69**
32.	Ľubomíra Šenitková	Z6	GLipany	50	1	6	2	3	3	0	**65**
33. - 34.	Jakub Trojanovič	Z6	ZŠmerPO	38	8	1	1	3	8	5	**64**
	Katarína Adamková	Z5	ZAJHZRV	31	2	9	7	0	8	5	**64**
35.	Tomáš Kubrický	Z6	ZKro4KE	40	5	9	-	3	4	-	**61**
36.	Kalista Semancová	Z6	ZSNP1HE	43	0	6	1	3	6	0	**59**
37.	Šimon Stano	Z5	ZPAngKE	41	3	9	5	0	-	-	**58**
38.	Viliam Karol Kubičár	Z6	ZOKožSN	36	3	9	5	3	-	-	**56**
39.	Alexandra Michalíková	Z5	ZKro4KE	33	-	7	9	3	-	-	**52**
40.	Vladimír Boguský	Z6	ZJuhVnT	22	6	9	6	3	5	0	**51**
41.	Jakub Kukučka	Z4	ZFKráZC	37	2	1	5	-	-	-	**50**
42. - 45.	Oskar Cacara	Z5	ZKro4KE	33	4	6	2	0	4	-	**49**
	Vlastimil Urda	Z6	ZBPPGPO	49	-	-	-	-	-	-	**49**
	Aneta Štefančínová	Z5	ZŠmerPO	34	4	1	3	0	4	2	**49**
	Lucia Gálová	Z4	ZSokoBA	49	-	-	-	-	-	-	**49**
46. - 47.	Martin Kuchta	Z6	GAlejKE	23	2	9	5	3	5	-	**47**
	Stella Répássyová	Z5	ZAJHZRV	29	3	6	5	0	4	0	**47**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
48.	Zuzana Mareková	Z6	ZKubrTN	46	-	-	-	-	-	-	**46**
49.	Vladimír Slanina	Z6	ZKro4KE	30	-	6	-	-	7	-	**43**
50.	Timotej Suvák	Z6	GJARMPO	28	4	6	2	0	-	2	**42**
51.	Miriama Kmecová	Z5	ZKro4KE	25	1	9	5	0	-	-	**40**
52.	Samuel Vangel	Z6	GVaršZA	39	-	-	-	-	-	-	**39**
53. - 54.	Jakub Šimon Konrád	Z4	ZKe28KE	37	-	-	-	-	-	-	**37**
	Lucia Ševčovičová	Z6	ZKubrTN	37	-	-	-	-	-	-	**37**
55.	Matej Válek	Z5	ZKro4KE	25	1	5	0	-	4	-	**35**
56. - 57.	Oliver Groh	Z5	ZKro4KE	32	-	-	-	-	-	-	**32**
	Ema Lola Škombárová	Z6	ZKro4KE	17	9	6	-	-	-	-	**32**
58. - 59.	Samuel Torhány	Z6	GAlejKE	21	1	6	0	0	3	0	**31**
	Henrietta Antoży	Z6	ZKro4KE	14	7	6	4	-	-	-	**31**
60. - 61.	Samuel Gajdoš	Z4	3ZPJ2ZV	30	-	-	-	-	-	-	**30**
	Peter Varga	Z6	ZKro4KE	21	-	9	-	-	-	-	**30**
62. - 65.	Martina Matejková	Z6	ZKubrTN	29	-	-	-	-	-	-	**29**
	Juraj Stach	Z4	ZTSNPBB	29	-	-	-	-	-	-	**29**
	Lukáš Hanes	Z5	ZKro4KE	25	2	2	-	-	-	-	**29**
	Nina Pacholská	Z6	ZKro4KE	29	-	-	-	-	-	-	**29**
66. - 67.	Barbora Jenčová	Z6	ZKubrTN	28	-	-	-	-	-	-	**28**
	Tomáš Vitko	Z6	ZOKožSN	24	1	3	0	0	-	-	**28**
68. - 69.	Veronika Ujhelyiová	Z5	ZJAKTvr	19	5	3	-	-	-	-	**27**
	Matúš Chovančák	Z6	ZKro4KE	26	1	-	-	-	-	-	**27**
70. - 72.	Samuel Hirko	Z4	3ZPJ2ZV	8	1	5	3	0	4	0	**26**
	Katarína Balážová	Z6	ZKubrTN	26	-	-	-	-	-	-	**26**
	Michal Badinka	Z4	3ZPJ2ZV	23	1	1	0	0	-	-	**26**
73. - 76.	Tomáš Kuník	Z6	ZKubrTN	18	0	1	4	0	0	2	**25**
	Sára Titková	Z6	ZJuhVnT	19	1	1	2	-	-	2	**25**
	Eduard Lehocký	Z6	ZKro4KE	11	4	6	1	0	3	-	**25**
	Michal Kaško	Z5	ZKro4KE	19	-	6	-	0	-	0	**25**
77. - 78.	Klára Kováčová	Z6	ZKo12SO	19	1	1	0	0	2	1	**24**
	Ema Repiská	Z5	ZFKráZC	21	2	1	0	0	-	-	**24**
79. - 82.	Tomáš Jakubec	Z6	ZOKožSN	15	-	6	2	0	-	-	**23**
	Filip Sabovčík	Z6	ZOKožSN	23	-	-	-	-	-	-	**23**
	Martin Šedovič	Z6	ZKro4KE	12	2	9	-	-	-	-	**23**
	Marko Kilík	Z6	ZJAKTvr	0	5	7	0	3	5	3	**23**
83. - 84.	Lenka Palušáková	Z6	ZOKožSN	14	2	6	0	-	-	-	**22**
	Jakub Babík	Z6	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
85. - 90.	Gregor Berta	Z4	ZMlynSC	21	-	-	-	-	-	-	**21**
	Adela Danková	Z6	3ZPJ2ZV	10	1	6	-	2	2	-	**21**
	Alexandra Krnáčová	Z6	3ZPJ2ZV	13	1	2	2	0	2	1	**21**
	Simona Gergelyová	Z5	ZAJHZRV	18	2	1	-	0	-	-	**21**
	Richelle Andrássyová	Z5	ZKro4KE	15	-	1	5	-	-	0	**21**
	Filip Olej	Z5	ZKro4KE	21	-	-	-	-	-	-	**21**
91. - 92.	Róbert Mráz	Z6	3ZPJ2ZV	20	-	-	-	-	-	-	**20**
	Tomáš Daňo	Z5	ZDruzKE	18	1	1	0	0	0	-	**20**
93.	Martin Šamaj	Z6	ZKubrTN	18	-	-	-	-	-	-	**18**
94.	Adam Munka	Z5	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
95. - 98.	Nina Karabellyová	Z6	ZTSNPBB	15	-	-	-	-	-	-	**15**
	Efram Vass	Z6	ZKro4KE	15	-	-	-	-	-	-	**15**
	Laura Sofia Hliváková	Z5	ZKro4KE	8	-	-	-	-	7	-	**15**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Dušan Ivan	Z5	ZKro4KE	7	-	1	4	3	-	-	**15**
99. - 100.	Martin Antoš	Z5	ZKro4KE	11	-	-	-	-	-	-	**11**
	Samuel Maco	Z5	ZKro4KE	8	2	1	-	-	-	-	**11**
101.	Jakub Lukáč	Z6	ZJuhVnT	9	-	1	0	0	-	-	**10**
102. - 104.	Pavol Šamko	Z5	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
	Šimon Stripaj	Z5	ZKro4KE	8	1	-	0	-	-	-	**9**
	Bogdana Studenková	Z5	ZKro4KE	3	1	3	2	-	-	0	**9**
105. - 106.	Šimon Pribičko	Z5	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Filip Sabovčík	Z6	ZOKožSN	0	-	6	2	0	-	-	**8**
107.	Alica Juhásová	Z5	ZKro4KE	7	-	-	0	-	-	-	**7**
108. - 110.	Hana Volšíková	Z5	ZKro4KE	6	-	-	0	0	-	-	**6**
	Martin Šamaj	Z6	ZŠ Kubra	0	4	1	1	0	0	-	**6**
	Stelka Jamborová	Z6	GAlejKE	0	5	1	-	0	-	-	**6**
111. - 112.	Beatka Kováčová	Z5	ZAJHZRV	5	-	-	-	-	-	-	**5**
	Stelka Jamborová	Z6	GAlejKE	5	-	-	-	-	-	-	**5**
113. - 115.	Marek Kováč	Z6	ZAJHZRV	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Dávid Györi	Z5	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Filip Fetyko	Z6	ZKro4KE	0	1	3	-	-	-	-	**4**
116.	Zuzana Benešová	Z6	ZKro4KE	0	-	3	0	-	-	-	**3**
117.	Yarden Cohen	Z6	ZKro4KE	2	-	-	-	-	-	-	**2**
118. - 120.	Adam Ilčík	Z5	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**
	Oskar Vizi	Z5	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**
	Michal Vokál	Z5	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**



Názov: MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2018 • Letný semester 27. ročníka
Internet: malynar.strom.sk
E-mail: malynar@strom.sk

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk