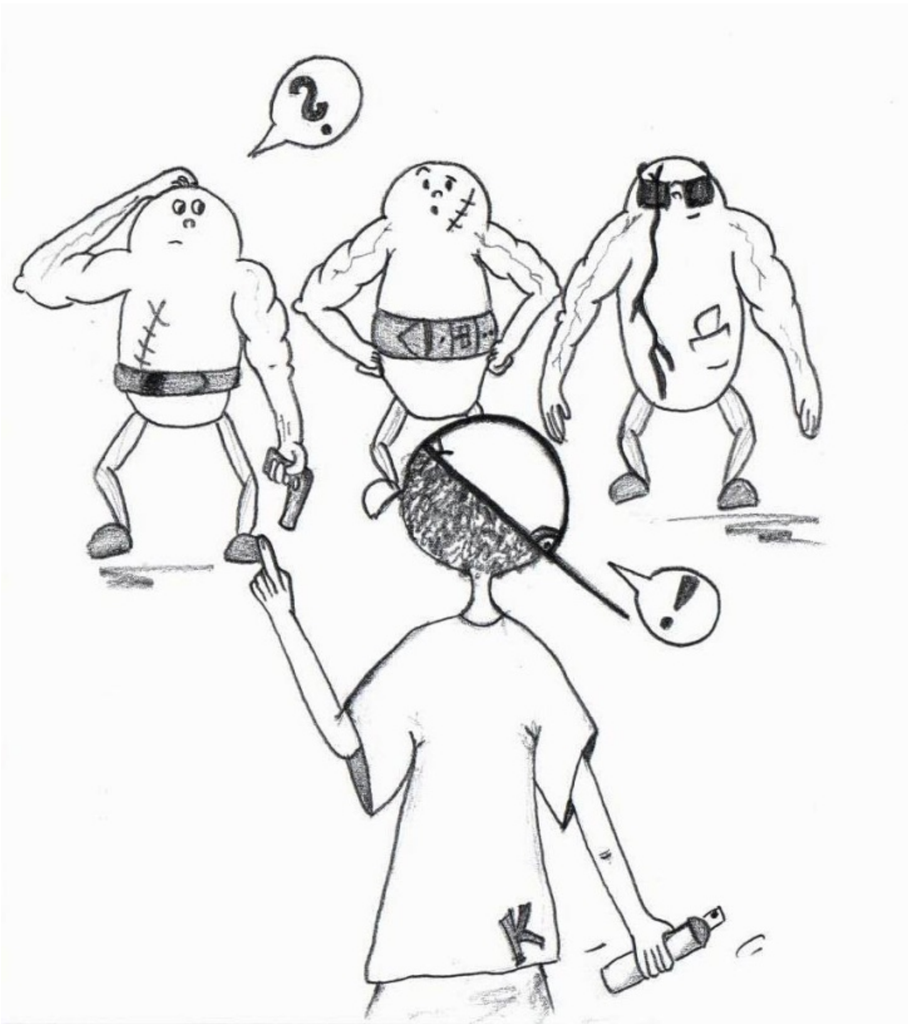
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo **3** — Ročník **23** Internet http://matik.strom.sk



Čaute matici :-).

Druhú sériu zimnej časti máme úspešne za sebou, hor sa teda na tú hŕbu dobrôt čakajúcu na naše hladné krky. Ako ste asi správne vytušili, chcela som tým naznačiť, že sa blížia Vianoce a s nimi samozrejme aj prázdniny. Cez prázdniny je ale povolená psychická aktivita len v malom množstve (aby ste si ju ušetrili na skvelé sústredko, ktoré na vás čaká už čoskoro), a tak vám tentoraz nové zadania úloh nezasielame. Nezabúdajte ale, že pre fyzickú aktivitu to neplatí, a tak . . . stavajte snehuliakov, sánkujte sa, lyžujte, guľujte čo vám hrdlo ráči.

Váš *MATIK*

Ako bolo...

Lomihlav Ako po minulé roky, aj tento november sa konala súťaž Lomihlav. Pre tých, čo tam neboli, vysvetlíme, že je to matematická súťaž štvorčlenných družstiev. Prebieha tak, že každé družstvo 66 minút rieši matematické úlohy, hlavolamy a hádanky a na konci vyhráva družstvo s najväčším počtom bodov. Tento rok sa 27. novembra v CVČ Domino v Košiciach stretlo 44 družstiev. Najúspešnejším z nich bolo družstvo z Krosnianskej 4 v zložení: Jano Jursa, Miro Stankovič, Filip Stripaj a Patrik Turzák. Na druhom mieste skončili žiaci Spojenej cirkevnej školy na Školskej 650 vo Vranove nad Topľou a na treťom žiaci Základnej školy Šmeralova 25 z Prešova. Okrem zaujímavých cien - napríklad rapkáčov - išlo tento rok aj o pozvánky na zimné sústredenie *MATIK*a, takže veríme, že sa s členmi prvých troch družstiev stretneme 31.1. na sústredení v Juskovej Voli.

Ako bude...

Frisbee Nečakane nám spadla z nebies ponuka na to, o čom sme mnohí už dávno rozmýšľali. Máme možnosť hrať frisbee celkom seriózne, s pravidelnými tréningami a pomaly už aj nejakými súťažami. Pre tých, čo by celkom nevedeli, čo je frisbee, tak je to šport s lietajúcim tanierom kombinujúci prvky viacerých známych športov. Zatiaľ to hráva partia riešiteľov a vedúcich STROMu, *MATIK*a aj MALYNÁRa. Ak by ste boli zvedaví a chceli sa k nám pridať, tak sa príďte pozrieť na naše tréningy, ktoré sú soboty a nedele o 15:30 v telocvični základnej školy v Barci (čo vôbec nie je až taká paža, ako by sa mohlo zdať :-D). Ak by ste mali nejaké otázky, treba sa spýtať na fóre na stránke *MATIK*a, kde vám určite niekto bude vedieť povedať viac.

Vzorové riešenia 2. série úloh

1 opravoval **Matúš Stehlík**
najkrajšie riešenia: Martin Liščinský, Magdaléna Krejčíová
34 riešení

Zadanie

Tech N9ne staval vežičku zo siedmych rovnakých kociek tak, že ich ukladal na seba, pričom každú kocku položil na tú pod ňou jedným z troch spôsobov: rovno na predošlú, alebo tak, že vytŕčala o $\frac{1}{7}$ spodnej steny doľava alebo doprava. Vedel, že ak sa stred nejakej kocky nenachádza nad spodnou stenou najspodnejšej kocky, tak veža spadne. Koľko rôznych vežičiek vedel postaviť?

Vzorové riešenie

Najprv je potrebné zistiť, kedy nám veža spadne. Ľahko prídeme na to, že je to práve vtedy, ak oproti spodnej vytŕča o $\frac{4}{7}$ a viac. Je to tak z toho dôvodu, lebo potom vytŕča o viac ako $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{4}{7} > \frac{1}{2}\right)$ a vtedy už veža spadne. Je potrebné dodať, že pri menšom „vytŕčaní" nespadne, lebo posúvať môžeme len o $\frac{1}{7}$ a $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$. Pretože stred každej kocky sa posúva o rovnako ako celá kocka, tak posunutie stredu každej kocky vzhľadom na spodnú je rovnaké ako posunutie jej stredu vzhľadom na stred spodnej kocky. Takže ak sa nám kocka posunie o viac ako polovicu hrany kocky vzhľadom na spodnú kocku, potom sa jej stred posunie rovnako, teda už sa nebude nachádzať nad podstavou spodnej kocky a veža spadne. Takže sme zistili, že žiadna kocka v našej veži nemôže vytŕčať o viac ako $\frac{3}{7}$ do jednej, či druhej strany vzhľadom na spodnú kocku. Ďalej môžeme úlohu riešiť dvoma spôsobmi.

1. spôsob

Ak máme 1 kocku, máme len 1 možnosť ako postaviť vežu. Ak chceme postaviť vežu z dvoch kociek, potom môžeme na našu 1-poschodovú vežu položiť ďalšiu kocku tromi spôsobmi (rovno, o $\frac{1}{7}$ vľavo a o $\frac{1}{7}$ vpravo). Keď pridáme tretiu kocku, máme 3 možnosti ako ju položiť, ale môžeme ju položiť na 3 rôzne dvojposchodové veže, to je $3 \cdot 3 = 9$ možností. Ako vidíme, vždy počet možností pre n kociek je rovný trojnásobku počtu možností pre vežu z $n - 1$(o 1 menej) kociek. Je to preto, že vždy máme 3 možnosti ako na každú z predošlých možností položiť ďalšiu kocku. Takže počet možností ako postaviť 7-poschodovú vežu je

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729.$$

V tomto počte sú ale zahrnuté aj tie možnosti, keď veža spadne. Tieto možnosti nájdeme a odpočítame ich.

Stačí nám nájsť všetky možnosti, kedy veža spadne na jednu stranu a ich vynásobením 2 získame počet všetkých možností, kedy spadne. Označme + posunutie doprava, − posunutie doľava (obidve o $\frac{1}{7}$ vzhľadom na predošlú kocku) a 0 položenie kocky rovno na predošlú. Dohodnime sa, že veže budeme písať do riadku od spodku po vrch (zľava doprava), pričom nás prvá (spodná) kocka nezaujíma, lebo je všade rovnako. Potom veža spadne, ak vyzerá takto:

1.	+	+	+	+	+	+
2.	+	+	+	+	+	0
3.	+	+	+	+	0	0
4.	+	+	+	+	–	–
5.	+	+	+	+	+	–
6.	+	+	+	+	–	0

1. → 1 možnosť
2. → 6 možností (môžu byť v ľubovoľnom poradí)
3. → 15 možností (môžu byť v ľubovoľnom poradí)
4. → 1 možnosť
5. → 6 možností (môžu byť v ľubovoľnom poradí)
6. → 6 možností (0 môžeme presunúť na každé miesto, ale – musí byť až za/nad všetkými +)

Napísali sme ich naozaj všetky, pretože tam musia byť aspoň 4 posunutia do jednej strany (posunutie o $\frac{4}{7}$ a viac, aby veža spadla), takže na tie zvyšné dve miesta môžeme pridať:++, 0+, 00, ––,++–, -0, a tieto všetky prípady sme prešetrili a spočítali možnosti, kedy veža spadne.

Spolu je to 35 možností. Po spomínanom prenásobení 2 (keď vymeníme + za – a opačne) je ich 70. Teraz nám stačí počet možností kedy veža spadne odpočítať od celkového počtu veží a dostaneme výsledok: 729 – 70 = 659.

2. spôsob

n / s	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
1	–	–	–	1	–	–	–
2	–	–	1	1	1	–	–
3	–	1	2	3	2	1	–
4	1	3	6	7	6	3	1
5	4	10	16	19	16	10	4
6	14	30	45	51	45	30	14
7	44	89	124	141	124	89	44

Toto je tabuľka, do ktorej sme si napísali, koľko je takých veží, ktoré majú svoju r-tú kocku, kde r je číslo riadku, posunutú o s, kde s je označenie stĺpca (keďže vieme, že žiadna kocka sa nesmie nachádzať v stĺpci s číslom viac ako $\frac{3}{7}$ a menej ako $\frac{-3}{7}$, kde $+$, $-$ označuje vpravo a vľavo).

Prvá kocka je posunutá o 0. Druhú kocku môžeme na predošlú položiť rovno, alebo posunúť o 1 stĺpec doľava, či doprava. Tretiu kocku vieme položiť na každú z predošlých veží rovnakými tromi spôsobmi (podobne aj štvrtú). Problém nastáva pri piatej, šiestej a siedmej kocke, ktoré v niektorých prípadoch už nemôžeme posunúť viac do jednej zo strán, lebo by nám spadla veža.

Ako si môžeme všimnúť, naša tabuľka nám znázorňuje, koľko je takých n-poschodových veží, ktoré majú svoju n-tú kocku posunutú o s vzhľadom na prvú kocku. Teda ak chceme postaviť o 1 poschodie vyššiu vežu, tak nám na zistenie týchto údajov do tabuľky stačí spočítať veže (bunky), z ktorých vieme pomocou položenia ďalšej kocky (či už rovno alebo posunutím o $\pm\frac{1}{7}$) získať vežu, ktorá má poslednú kocku v tej danej bunke. No už vieme, že posúvať sa môžeme (v stĺpcoch) iba do toho istého, alebo do susedných dvoch (vľavo a vpravo), pretože to je posunutie o $\pm\frac{1}{7}$ alebo rovno na predošlú kocku.

Teda počet veží končiacich v danej bunke získame súčtom buniek nad ňou (o 1 riadok vyššie) v rovnakom a susedných stĺpcoch. Takže ak nechceme počítať veže, ktoré nebudú stáť, tak jednoducho budeme počítať všetky bunky mimo našej tabuľky za 0. Počet možností ako postaviť 7-poschodovú vežu tak, aby nespadla, je súčtom hodnôt v siedmom riadku (lebo posledná kocka môže byť posunutá vzhľadom na prvú od $-\frac{3}{7}$ až po $+\frac{3}{7}$). Takže výsledkom je

$$44 + 89 + 124 + 141 + 124 + 89 + 44 = 659.$$

Komentár. O riešenie číslo 1 ste sa viacerí pokúšali, no nikomu sa nepodarilo nájsť všetky možnosti, kedy veža spadne. Preto sa mi to druhé zdá vhodnejšie (nedá sa v ňom zabudnúť na žiadnu možnosť, ani nejaké možnosti započítať viackrát). Ak už sa však vrhneme na vypisovanie možností, tak je super, ak je v tom systém (vypisovať ich čo najmenej: radšej sme vypísali tie, kde veža spadne, ako vypísať tie, kedy bude stáť a to všetko sme ešte zmenšili na polovicu) a viete zdôvodniť, že ich je práve toľko.

2 opravoval **Robčo Tóth**

najkrajšie riešenia: Viktória Valachová, Patrik Turzák

37 riešení

Zadanie

Bielik a Belo mali každý debničku s kyselinovými ampulkami. Dokopy tam bolo 2009 ampuliek. Pamätali si iba, že najväčší spoločný deliteľ počtu ampuliek v Belovej debničke a počtu ampuliek v Bielikovej debničke bol druhou mocninou prirodzeného čísla väčšieho ako 1. Koľko je možností pre počet ampuliek v Belovej debničke? (Nemusíte všetky tieto možnosti vypísať.)

Vzorové riešenie

Zo zadania vieme, že počty ampuliek v Belovej a Bielikovej debničke majú spoločného deliteľa (väčšieho ako 1 a dokonca je to aj druhá mocnina). No a teraz po troche zamyslenia prídeme na to, že ak nejaké číslo delí oboch sčítancov, tak musí deliť aj súčet.

Teda ak je Belov počet ampuliek deliteľný napríklad dvoma a aj Bielikov počet ampuliek je deliteľný dvoma, musí platiť, že aj počet ampuliek, ktoré majú dokopy (teda 2009), musí byť deliteľný dvoma.

V reči matematiky: majme dve prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné číslom R. Obe majú teda tvary $A \cdot R$ a $B \cdot R$. Pozrime sa na ich súčet: $A \cdot R + B \cdot R = SÚČET$ Po vybratí čísla R pred zátvorku, $R \cdot (A + B) = SÚČET$, vidíme, že ľavá strana je násobkom čísla R a teda bude aj pravá strana násobkom R. Toto nám veľmi pomôže, pretože teraz sa jednoducho vieme pozrieť na číslo 2009 a vydedukovať, aké číslo by asi mohlo byť naším najväčším spoločným deliteľom. Teda hľadáme číslo, ktoré delí 2009 a je druhou mocninou prirodzeného čísla väčšieho ako jedna. Na najefektívnejšie zistenie niečoho takého poslúži prvočíselný rozklad 2009 (minulá séria, pamätáte?).

$2009 = 4 \cdot 7 \cdot 7$. Z tade už jasne vidíme, že jediné také číslo bude $7 \cdot 7 = 49$. (Ostatné kombinácie nie sú druhou mocninou). Počty ampuliek v debničkách Bela a Bielika sa teda dajú vyjadriť ako $A \cdot 49$ a $B \cdot 49$, pričom, teraz pozor, A a B sú nesúdeliteľné (teda neexistuje žiadne číslo okrem jednotky, ktoré by delilo aj A aj B). Je to preto, lebo ak by mali A a B ešte nejakého iného spoločného deliteľa, bolo by to v spore s tým, že 49 je najväčší spoločný deliteľ týchto čísel. Z rovnice $A \cdot 49 + B \cdot 49 = 2009$ dostávame, že A+B=41, teda nám stačí vyskúšať 40 možností (od 1 po 40): 1+40, 2+39, 3+38, 4+37, 5+36, 6+35, 7+34, 8+33, 9+32, 10+31, 11+30, 12+29, 13+28, 14+27, 15+26, 16+25, 17+24, 18+23, 19+22, 20+21 a ďalej sa to už začne opakovať, len s vymeneným poradím. Každá dvojica je nesúdeliteľná (nemá spoločných deliteľov), takže môžeme smelo prehlásiť, že riešení je 40.

Komentár. Výzva pre náročných: pokúste sa vďaka poznatkom z deliteľnosti dokázať, že A, B musia byť nesúdeliteľné a nemusíme si teda naše možnosti ani vypísať a overovať. Za objavenie najväčšieho spoločného deliteľa som dával 4 body, za objavenie riešení boli body 3 a nakoniec za objasnenie korektnosti riešenia z hľadiska nesúdeliteľnosti boli 2 body. Po bode ste mohli stratiť, ak ste mali zlý výsledok, alebo ste sa zamotali pri hľadaní deliteľa.

3 opravovali **Ivka Gašková** a **Marek Derňár**
najkrajšie riešenia: Zuzana Králiková, Roman Pivovarník

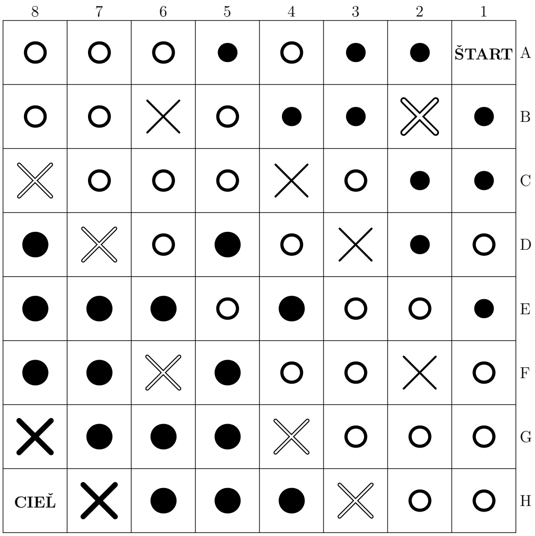
34 riešení

Zadanie

Vezmite si šachovnicu 8×8. Do pravého horného rohu umiestnite figúrku. Hráč, ktorý je na ťahu, ju môže posunúť o 1, 2 alebo 3 políčka doľava, dole alebo uhlopriečkovo doľava-dole, vždy len jedným z týchto smerov, to znamená, že smery sa nedajú kombinovať (hráč nemôže ísť v jednom ťahu napríklad o políčko dole a potom o políčko po uhlopriečke). Ten, kto musí potiahnuť na ľavé dolné políčko, prehráva. Hrajú dvaja hráči a po každom ťahu sa striedajú. Keby ste mali hrať túto hru proti Karcinogénovi, chceli by ste začínať? Kam alebo akým systémom by ste ťahali figúrkou aby ste vyhrali?

Vzorové riešenie

Ak by sme túto hru skúšali hrať, zdalo by sa nám to príliš zložité. Mali by sme veľmi veľa možností pre priebeh danej hry, čiže by sme to museli veľmi veľa krát skúšať, kým by sme postrehli nejakú vyhrávajúcu taktiku. Začnime preto od konca.



Označme políčka číslami a písmenami kvôli prehľadnosti. Ľavý dolný roh má podľa obrázka pozíciu H8. Môžeme sa posúvať len dole, doľava a uhlopriečkovo doľava-dole (a to o jedno až tri políčka). Našim cieľom je donútiť súpera, aby potiahol na políčko H8 (toto políčko teda označíme ako „CIEĽ“). Začíname na políčku A1 (označeného ako „ŠTART“).

Ak by sme boli na políčku H7 alebo G8, tak by sme museli posunúť figúrku do „CIEĽa“ , čiže by sme prehrali. Tieto dve políčka sú teda prehrávajúce a na obrázku sme ich označili hrubšími vyplnenými krížikmi.

Pokiaľ by sme však boli s figúrkou na niektorom z políčok označených väčšími vyplnenými krúžkami, tak by sme okamžite potiahli do políčka H7 alebo G8. Potom by súper vynútene prehral, teda my by sme vyhrali. Tieto políčka (označené väčšími vyplnenými krúžkami) sú teda pre nás vyhrávajúce.

Pozrime sa na políčka označené tenšími nevyplnenými krížikmi (presnejšie políčka H3, G4, F6, D7 a C8). Ak by sme z nich urobili ľubovoľný prípustný ťah, tak by sa súper ocitol na niektorom políčku označenom krúžkom, čiže na vyhrávajúcom políčku. Potom by však súper už mohol vyhrať, teda políčka označené tenšími nevyplnenými krížikmi sú prehrávajúce.

Pravdepodobne je už teraz každému jasné, ako ďalej budeme postupovať. Rovnakým spôsobom ako doteraz budeme určovať vyhrávajúce a prehrávajúce políčka.

Ďalšie výherné políčka teda budú políčka označené nevyplnenými krúžkami. Potom vieme zistiť, že políčka označené tenšími vyplnenými krúžkami sú prehrávajúce. Teda políčka označené menšími vyplnenými krúžkami sú vyhrávajúce.

Teraz nám už ostali neurčené iba políčka B2 a A1. Keďže z políčka B2 sa vieme dostať iba na políčka označené krúžkami, tak súper potom bude vedieť vyhrať. Teda toto políčko je určite pre nás prehrávajúce (označíme hrubším nevyplneným krížikom). Na neho však vieme potiahnuť z A1, teda políčko A1 je pre začínajúceho hráča vyhrávajúce. Takže ak by sme hrali hru proti Karcinogénovi, určite by sme chceli začínať.

Zhrňme si teda taktiku, ktorou by sme vyhrali:

- Prvý ťah by sme urobili na políčko označené hrubším nevyplneným krížikom (teda B2).
- Hocikde by Karcinogén potiahol, my by sme šli na niektoré políčko označené tenším vyplneným krížikom. (Alebo ak by sme mohli, tak až na políčko označené tenším nevyplneným krížikom. Potom by sme však nasledujúci bod tejto taktiky vynechali.)
- Hocikde by Karcinogén potiahol, my by sme šli na niektoré políčko označené tenším nevyplneným krížikom. (Alebo ak by sme mohli, tak až na políčko

označené hrubším vyplneným krížikom. Potom by sme však nasledujúci bod tejto taktiky vynechali.)

- Hocikde by Karcinogén potiahol, my by sme šli na niektoré políčko označené hrubším vyplneným krížikom.
- V nasledujúcom ťahu by Karcinogém musel potiahnuť na políčko „CIEĽ“ , teda by prehral.

Jednoducho povedané vždy nám stačí ťahať na políčko označené krížikom, a potom máme istú výhru :-).

Komentár. Mnoho riešiteľov úlohu vyriešilo veľmi pekne a správne. Ak ste však neprišli na myšlienku „ísť od konca“ , tak bola úloha zložitá a väčšinou ste preverili iba niekoľko možností priebehu hry. Napríklad veľmi často ste začínali pohybom figúrky dole a tvrdili, že tak vyhráte. Tento ťah by bol však od vás prehrávajúci, keďže Karcinogén by sa potom ocitol vo vyhrávajúcom políčku (ako vidíme v tabuľke).

4

opravovali **Danko Till** a **Monča Vaľková**

najkrajšie riešenia: Samuel Sládek, Viktória Valachová

37 riešení

Zadanie

Bolo to 9-ciferné číslo, v ktorom sa každá cifra od 1 po 9 opakovala práve raz. Číslo spĺňalo všetky nasledovné podmienky:

- bolo deliteľné 9
- ak z pravej strany škrtneme poslednú cifru, číslo, ktoré ostane, musí byť deliteľné 8
- ak z pravej strany na novovzniknutom čísle znovu škrtneme poslednú cifru, číslo, ktoré ostane, musí byť deliteľné 7
- ak z pravej strany na novovzniknutom čísle znovu škrtneme poslednú cifru, číslo, ktoré ostane, musí byť deliteľné 6 . . .

A tak ďalej, až kým neostane iba jedna samostatná cifra, ktorá musí byť deliteľná číslom 1. Aké je to číslo?

Vzorové riešenie

Označme naše hľadané číslo $\overline{ABCDEFGHI}$. Myslíme tým, že prvá cifra je A, druhá B, atď. Na ich miesta máme dosadiť cifry od 1 po 9, každú práve raz.

Začnime tým najľahším. Ak má byť číslo $\overline{ABCDE}$ deliteľné piatimi, tak jeho posledná cifra musí byť 5 (pretože 0 nemôžeme použiť). Je teda jasné, že $E = 5$.

Hneď si môžeme všimnúť, že ciferný súčet nášho $\overline{ABCDEFGHI}$ je $1 + 2 + 3 + + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, pretože všetky tieto čísla tam budú a nezáleží na tom, v akom poradí. Ciferný súčet nášho čísla teda bude deliteľný 9 a teda naše číslo bude vždy deliteľné 9.

Teraz si skúsime uvedomiť, že číslo $\overline{ABCD5FGH}$ má byť deliteľné 8, číslo $\overline{ABCD5F}$ má byť deliteľné 6, číslo $\overline{ABCD}$ má byť deliteľné 4 a číslo $\overline{AB}$ má byť deliteľné 2. Teda všetky tieto čísla budú deliteľné 2, teda na ich konci budú párne čísla. Z toho potom vyplýva, že všade inde, teda na nepárnych pozíciách, budú nepárne čísla.

Využijeme to, že číslo $\overline{ABCD}$ má byť deliteľné 4. Teda $\overline{CD}$ má byť deliteľné 4 a pritom C má byť nepárne. Dvojciferné násobky štvorky s prvou nepárnou cifrou majú na mieste jednotiek vždy iba dvojku alebo šestku. Tým sme sa obmedzili na dve možnosti: buď D=2 alebo D=6.

Ďalej číslo $\overline{ABC}$ musí byť deliteľné 3. To bude práve vtedy, keď jeho ciferný súčet t.j. $A + B + C$ bude deliteľný tromi. A číslo $\overline{ABCD5F}$ musí byť deliteľné 6, teda aj tromi, t.j. jeho ciferný súčet $A + B + C + D + 5 + F$ musí byť deliteľný tromi. Keďže $A + B + C$ už tromi deliteľné je, musí byť tromi deliteľné aj $D + 5 + F$. Keďže už vieme, že D=2 alebo D=6, tak máme iba dve možnosti. Naše číslo môže vyzerať ako $\overline{ABC258GHI}$ alebo $\overline{ABC654GHI}$.

Skúsime sa pozrieť na to, že číslo $\overline{ABCD5FGH}$ má byť deliteľné 8. To bude práve vtedy, ak $\overline{FGH}$ bude deliteľné 8. Môžeme to však zjednodušiť, ak si uvedomíme, že F je párne a teda nám stačí, aby bolo 8 deliteľné číslo $\overline{GH}$. Je to tak preto, lebo číslo $\overline{F00}$ bude násobkom 200, teda určite deliteľné 8, a teda číslu $\overline{GH}$ nezostáva nič iné, len byť tiež deliteľné 8. Ak vezmeme do úvahy, že G má byť nepárne a H má byť párne, tak dostávame iba štyri možnosti:

G	1	3	7	9
H	6	2	2	6

Ak vieme, že naše číslo bude vyzerať ako $\overline{ABC258GHI}$ alebo $\overline{ABC654GHI}$ a vezmeme do úvahy tieto štyri možnosti, tak dostávame už iba štyri možnosti ako môže naše číslo vyzerať aby sa v ňom neopakovali cifry.

$$\overline{ABC25816I}$$
$$\overline{ABC25896I}$$
$$\overline{ABC65432I}$$
$$\overline{ABC65472I}$$

Použili sme už tri párne cifry, takže na mieste B bude tá zvyšná. Vyššie sme ukázali, že aj posledné trojčíslie bude mať ciferný súčet deliteľný tromi, takže cifru I môžeme nahradiť takým nepárnym číslom, aby nám to sedelo. Potom naše čísla vyzerajú takto:

$\overline{A4C258963}$ a zostanú nám cifry 1 a 7.
$\overline{A8C654327}$ a zostanú nám cifry 1 a 9.
$\overline{A8C654321}$ a zostanú nám cifry 7 a 9.
$\overline{A8C654729}$ a zostanú nám cifry 1 a 3.
$\overline{A8C654723}$ a zostanú nám cifry 1 a 9.
Do možnosti $\overline{A4C25816I}$ nevieme nájsť vhodné I (3, 7 ani 9 tam nesedí).

Cifry, ktoré nám zostali, vieme dosadiť v každej z našich možností dvoma spôsobmi. Preto máme týchto 10 možností:

987 654 321
789 654 321
981 654 327
189 654 327
981 654 723
189 654 723
381 654 729
183 654 729
741 258 963
147 258 963

Tieto možnosti spĺňajú všetky podmienky okrem toho, že číslo $\overline{ABCD5FG}$ má byť deliteľné 7. Na to nemáme žiadnu fintu, neostáva nám nič iné, iba to vydeliť. Jediné číslo $\overline{ABCD5FG}$, ktoré sa dá deliť siedmimi je 3 816 547.

Naše hľadané číslo je teda 381 654 729 a je to jediné, ktoré spĺňa zadané podmienky.

5 opravovala **Peťka Zibrínová**

najkrajšie riešenia: Ján Jursa, Juraj Paľa

40 riešení

Zadanie

Máme vírusy A, B, C, ktoré majú v košíčku jablká a hrušky (jeden má 2 jablká, ďalší 2 hrušky a posledný 1 jablko a 1 hrušku). Každý z vírusov povedal klamný výrok o obsahu svojho košíčka.

- A: „Mám 2 jablká.“
- B: „Mám 2 hrušky.“
- C: „Mám 1 jablko a 1 hrušku.“

Na „výzvu“ si vami určený vírus náhodne vytiahne jeden kus ovocia z košíčka. Aký je najmenší počet výziev potrebný na určenie košíčka s jedným jablkom a jednou hruškou za všetkých možných okolností? Ako treba postupovať?

Vzorové riešenie

Keďže všetky 3 vírusy klamú, vírus A môže mať buď 2 hrušky alebo jablko a hrušku, vírus B môže mať 2 jablká alebo jablko a hrušku, vírus C buď 2 jablká alebo 2 hrušky.

Ak by sme najprv vyzvali vírus A a ukázal by jablko, hneď vieme, že práve on má košík s jablkom a hruškou. No ak by ukázal hrušku, nevieme s istotu povedať, čo má v košíku, takže v tomto prípade jedna výzva nestačí. To isté platí aj pre B - ak ukáže hrušku, vieme, že on má košík s jablkom a hruškou. No ak ukáže jablko, jedna výzva nestačí. A my pri týchto dvoch vírusoch nemáme zaručené, že vytiahnu práve to ovocie, podľa ktorého to budeme vedieť určiť na jednu výzvu, takže treba aspoň 2 výzvy.

Ak by sme ako prvý vyzvali vírus C a ukázal by hrušku, vieme, že má 2 hrušky, teda vírus A by mohol mať už len jablko a hrušku, čo sme potrebovali zistiť. Keby vírus C ukázal jablko, znamená to, že má 2 jablká a vírusu B by ostala možnosť jablko a hruška. Takže najmenší počet výziev na určenie košíka s jablkom a hruškou je jedna, pričom treba vyzvať vírus C.

Poznámka: V zadaní sa nič nehovorí o tom, že vírus, ktorý ovocie vyberie z košíka, ho aj vráti naspäť.

Komentár. Najčastejšou chybou bolo, že ste poniektorí hneď na začiatku vylúčili vírus C, pričom cez neho by ste sa dopracovali k správnemu riešeniu. Na druhej strane tu bolo veľa pekných riešení, čo je super ;-).

6

opravovala **Janka Baranová**

najkrajšie riešenia: Samuel Sládek, Viktória Valachová

39 riešení

Zadanie

Je daný trojuholník ABC, bod Y na strane BC a bod X na strane CA tak, že $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB| = 90^\circ$. Ďalej vieme, že $|XB| = |YA|$. Musí byť trojuholník ABC rovnoramenný? Prečo?

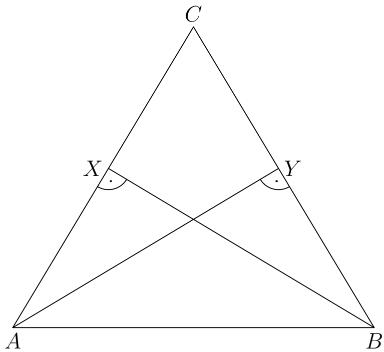
Vzorové riešenie

V prvom rade by sme sa chceli ospravedlniť, ale ani my nie sme neomylní. V zadaní bola chyba - bod Y nemal ležať na strane AB, ale na strane BC (ako to vidíme v opravenom zadaní). Tak a teraz poďme k riešeniu tejto úlohy.

1. spôsob

V prvom rade bolo dôležité uvedomiť si, že YA a XB sú výšky na strany a a b, keďže sú na tieto strany kolmé (to máme zo zadania). Ďalej si už len stačilo uvedomiť, že obsah trojuholníka ABC je možné vyjadriť dvoma spôsobmi a to:

$$S = \frac{|AC| \cdot |XB|}{2} \text{ alebo } S = \frac{|BC| \cdot |YA|}{2}.$$



Je to ten istý obsah, takže môžeme písať

$$\frac{|AC| \cdot |XB|}{2} = \frac{|BC| \cdot |YA|}{2}.$$

Vieme, že $|XB| = |YA|$ (zo zadania), preto môžeme túto rovnicu vynásobiť dvomi a predeliť $|XB|$ a teda dostávame $|AC| = |BC|$. A to je to, čo sme chceli dostať, že trojuholník ABC musí byť rovnoramenný.

2. spôsob

Môžeme sa na túto úlohu pozrieť aj inak. Všimnime si trojuholníky AYB a BXA. Vyzerajú nejak tak rovnako. A teraz si už ľahko uvedomíme, že sú zhodné a to podľa vety Ssu, lebo majú spoločnú stranu AB (je to dlhšia strana, keďže je to prepona), ďalej zo zadania máme, že $|AY| = |BX|$ a tiež $|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle BXA| = 90^\circ$. Keďže sú tieto dva trojuholníky zhodné, tak sa zhodujú aj v ostatných uhloch a stranách, teda aj $|\sphericalangle YBA| = |\sphericalangle XAB|$ a keďže uhly pri základni sú zhodné, tak trojuholník ABC je rovnoramenný.

Komentár. Niektorí z vás išli riešiť tú podstatne ľahšiu úlohu. Je mi to ľúto, ale vám som plný počet bodov žiaľ dať nemohla, keďže niektorí sa dovtípili, že toto zadanie nebolo správne a riešili takú úlohu, akú sme mali na mysli. A navyše sme túto chybu včas vyvesili aj na našu web stránku. Do budúcna, ak si nebudete istí so zadaním hociktorej úlohy, tak sa informujte na mailovej adrese alebo web stránke.

Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1.	Katarína Krajčiová	Tercia	GAlejKE	53	9	6	9	9	9	9	107
2.	Zuzana Králiková	Sekunda A	GAlejKE	54	5	7	9	9	9	9	106
3.	Alexander Ténai	Tercia	GAlejKE	53	9	7	9	7	9	9	105
4. – 5.	Patrik Turzák	9. A	ZKro4KE	51	9	8	9	8	9	9	103
	Samuel Sládek	Sekunda A	GMierNO	54	6	-	9	9	7	9	103
6.	Dorota Jarošová	Tercia	GAlejKE	52	9	6	9	9	6	6	100
7.	Vladislav Vancák	Kvarta B	GAlejKE	52	6	7	9	9	9	4	96
8.	Martin Liščinský	9. A	ZJuhoKE	50	9	7	9	2	9	9	95
9.	Viktória Valachová	9. A	ZMarkSN	52	-	9	9	9	5	9	93
10.	Martin Rapavý	Kvarta A	GAlejKE	48	7	7	9	9	5	7	92
11.	Magdaléna Krejčíová	Kvarta A	GTataPP	52	9	-	9	6	5	9	90
12.	Ján Jursa	9. A	ZKro4KE	50	1	6	7	3	9	9	85
13.	Roman Pivovarník	Kvarta A	GMudrPO	43	-	7	9	7	9	9	84
14. – 15.	Peter Micek	9. A	ZKro4KE	31	9	7	8	3	9	9	76
	Anton Gromóczki	8. A	ZStanKE	50	5	4	4	-	5	4	76
16. – 17.	Bianca Gross	7. B	ZTomKe	46	7	1	1	2	9	1	75
	Martin Vrabec	8. A	ZKro4KE	51	5	6	-	-	5	8	75
18.	Peter Gábor	Tercia A	GKonšPO	41	5	0	1	2	9	5	72
19. – 20.	Vladimír Sabo	Kvarta B	GAlejKE	43	5	3	2	4	9	5	71
	Silvia Dobránska	7. B	ZTomKe	42	7	1	-	2	9	1	71
21.	Juraj Paľa	7. B	ZTomKe	31	7	1	5	5	9	4	70
22.	Samuel Burik	7. A	ZKomeSV	39	1	4	3	3	8	2	67
23.	Adam Õrhalmi	7. A	ZKro4KE	39	5	-	2	3	1	8	66
24.	Kristína Lengyelová	7. B	ZTomKe	35	7	1	-	2	9	1	64
25.	Jana Zorvanová	7. A	ZJiráBJ	38	6	3	1	-	5	4	63
26.	Alfréd Onderko	9. A	ZJuhoKE	34	-	7	-	8	9	4	62
27.	Ivana Jakubčáková	7. A	ZKomePP	27	5	4	4	8	2	5	61
28.	Matúš Čirip	Kvarta A	GMudrPO	33	-	7	5	2	5	7	59
29.	Martin Paľko	Kvarta B	GAlejKE	34	1	3	-	4	9	5	56
30.	Florián Hatala	8. A	ZKro4KE	37	-	7	2	4	5	-	55
31.	Alexandra Drozdová	7. A	ZKomeSV	25	1	2	2	5	9	2	54
32.	Filip Stripaj	9. A	ZKro4KE	53	-	-	-	-	-	-	53
33.	Jozef Janovec	Tercia	GAlejKE	52	-	-	-	-	-	-	52
34.	Tomáš Daneshjo	8. A	ZKro4KE	49	-	-	-	-	-	-	49
35. – 37.	Laura Remetová	9. B	ZJiráBJ	30	6	4	1	1	1	5	48
	Ema Dučáková	8. A	ZKomePP	41	-	7	-	-	-	-	48
	Barbora Kompišová	Kvarta A	GTataPP	48	-	-	-	-	-	-	48
38.	Diana Ivanidesová	Kvarta A	GTataPP	47	-	-	-	-	-	-	47
39.	Peter Vook	8. A	ZKro4KE	45	-	-	-	-	-	-	45

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
40.	Andrea Čechová	7. B	ZJiráBJ	33	0	1	1	1	3	1	43
41. – 42.	Jakub Kupčík	8. A	ZKro4KE	38	-	-	-	-	-	-	38
	Oliver Koreň	8. A	ZKro4KE	38	-	-	-	-	-	-	38
43.	Stanislav Zeman	Kvarta A	GAlejKE	27	1	5	1	1	2	-	37
44. – 47.	Miroslav Stankovič	9. A	ZKro4KE	34	-	-	-	-	-	-	34
	Kristína Valigová	7. A	ZKomeSV	26	1	0	0	0	3	1	34
	Daniel Hajduk	8. A	ZKro4KE	34	-	-	-	-	-	-	34
	Michal Greššák	8. A	ZKro4KE	34	-	-	-	-	-	-	34
48.	Dominik Stripaj	7. A	ZKro4KE	30	-	-	-	-	-	-	30
49. – 51.	Bibiana Hanzeľová	Tercia	GAlejKE	29	-	-	-	-	-	-	29
	Diana Ďurišová	7. A	ZKomePP	29	-	-	-	-	-	-	29
	Denis Rozložník	8. A	ZKro4KE	29	-	-	-	-	-	-	29
52. – 53.	Ivana Lešková	7. B	ZHutnSN	28	-	-	-	-	-	-	28
	Ivana Miňová	Tercia	GAlejKE	28	-	-	-	-	-	-	28
54. – 55.	Samuel Černík	9. A	ZKro4KE	13	-	-	-	-	7	7	27
	Jakub Hromada	8. A	ZKro4KE	27	-	-	-	-	-	-	27
56. – 59.	Michaela Ankonyová	7. B	ZHutnSN	26	-	-	-	-	-	-	26
	Frederika Šteňová	7. A	ZKomeSV	19	1	0	0	0	3	0	26
	Matej Bobrik	7. A	ZMaurKE	26	-	-	-	-	-	-	26
	Jana Cerulová	8. A	ZKro4KE	17	-	-	2	3	4	-	26
60.	Július Urmacher	8. A	ZKuzmic	25	-	-	-	-	-	-	25
61.	Richard Husár	8. A	ZStanKE	24	-	-	-	-	-	-	24
62. – 66.	Kristína Grošková	9. B	ZJiráBJ	23	-	-	-	-	-	-	23
	Michal Angelovič	7. A	ZMaurKE	23	-	-	-	-	-	-	23
	Matúš Tóth	7. A	ZAbovKE	23	-	-	-	-	-	-	23
	Daniel Ondra	9. A	ZKro4KE	0	1	7	1	-	9	5	23
	Monika Mitterová	Tercia B	GDuklPO	23	-	-	-	-	-	-	23
67. – 68.	Lenka Maťašová	8. A	ZKomeSB	19	0	0	1	0	1	1	22
	Maroš Varga	8. A	ZKuzmic	22	-	-	-	-	-	-	22
69.	Ivana Sokolová	9. B	ZJiráBJ	20	-	-	-	-	-	-	20
70.	Štefan Krištof	Tercia B	GDuklPO	19	-	-	-	-	-	-	19
71. – 72.	Dominik Benko	8. A	ZKro4KE	18	-	-	-	-	-	-	18
	Jakub Basa	7. B	ZJiráBJ	18	-	-	-	-	-	-	18
73. – 74.	Petra Eškutová	8. A	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	17
	Róbert Bajcura	7. A	ZHrnčSP	17	-	-	-	-	-	-	17
75.	Ivana Senajová	8. B	ZJiráBJ	15	-	-	-	-	-	-	15
76.	Lukáš Gdovin	8. A	ZStanKE	7	-	-	-	0	1	4	12
77.	Simona Fabuľová	Tercia B	GDuklPO	10	-	-	-	-	-	-	10
78.	Marek Pravda	8. A	ZStanKE	0	1	0	-	0	-	4	5
79.	Mária Kimáková	7. A	ZHrnčSP	2	-	-	-	-	-	-	2

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 3 • Zimná časť 23. ročníka (2009/10) • Vychádza 10. decembra 2009
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`