KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **3** — ROČNÍK **25** INTERNET http://matik.strom.sk

No nazdar!

Hovoríš si, držiac v rukách časopis, ktorý už konečne obsahuje konečné poradie. Napätie a stres, ktorý si si prežil s čakaním naň, je preč. Na tvári sa opäť ukáže úsmev z nadšenia, ako fajne si zarátate na ďalšom, čestne zaslúženom sústredku, či v nasledujúcej sérii. Bola to dobre odvedená práca. No teraz už prišiel čas odložiť kalkulačku na zimný spánok, a v zdraví a šťastí si užívať sneh a vianočné koláče.

Vaši vedúci *MATIK*a

Ako bolo

Lomihlav V piatok 25.11.2011 sa v CVČ Domino konala súťaž družstiev LOMIHLAV. Spolu až 41 družstiev sa vydalo pomáhať do ríše šmolkov. V modrom duchu sa niesol aj zvyšok súťaže. Za magických 66 minút si najúspešnejšie družstvá zo ZŠ Krosnianska 4 v Košiciach a zo ZŠ s MŠ Pod Vinbargom 1 v Bardejove zabezpečili účasť na zimnom sústredení *MATIK*a a spolu s ďalšími siedmimi družstvami vyhrali tie najšmolkovejšie ceny. Počas prestávky mali súťažiaci možnosť získať sladké odmeny za splnenie niekoľkých úloh na zaujímavých stanovištiach. Dúfame, že sa so všetkými stretneme na ešte lepšom budúcoročnom LOMIHLAVe. Došmolkovania priatelia!

Ako bude

Lov na Yettiho Lovu zdar! Pridajte sa k expedícii po stopách Yettiho a pomôžte rozlúštiť nevyriešenú záhadu jeho existencie. Nemajte strach, stopa je horúca a cítime, že Yetti je už blízko, teda dlhého chodenia sa báť nemusíte. Termín expedície je zatiaľ nejasný, keďže už niekoľko týždňov nesnežilo a Yetti nám nemá kde zanechať stopy. No nebojte sa, po napadnutí snehu sa na našich expedičných stránkach matik.strom.sk a aj na facebooku v skupine *MATIK*objavia ďalšie informácie k tejto expedícii. Pred pár dňami bol Yetti videný v oblasti Jahodnej, Kavečian a Červeného Brehu, kam najpravdepodobnejšie bude smerovať aj naša expedícia niektorú sobotu od 10.12.2011 do 14.1.2012. Pre ďalšie info sleduj vyššie spomenuté stránky. Tak hor sa na Yettiho!

Maxiklub Príďte sa vianočne naladiť na tradičný decembrový Maxiklub celého združenia Strom. Stretnete kamarátov aj vedúcich zo sústredení a len tak si s nimi budete môcť pokecať. Chýbať nebudú spoločenské hry, dobrá kapustnica a teplý čajík na zahriatie. Maxiklub sa bude konať na Jesennej 5 a začne sa 22. 12. 2011 okolo jednej.

Vzorové riešenia 2. série úloh

1

opravovali **Ivka Gašková** a **Tina Jesenská**
najkrajšie riešenie: Soňa Feciskaninová, Jakub Hlaváčik

40 riešení

Zadanie

Kusov jedla bolo nakoniec presne 100. Tóno očísloval kusy jedla postupne číslami 1 až 100 a potom sa ich snažil rozdeliť na 2 časti – jedna preňho a druhá pre jeho milovanú – tak, aby sa rozdiel žiadnych dvoch čísel z jednej skupiny nenachádzal v tej istej skupine. Vie jedlo takto rozdeliť?

Vzorové riešenie

Našou úlohou je rozdeliť 100 kusov jedla na dve kôpky tak, aby platila podmienka zo zadania. Nie je povedané, že počet kusov má byť na oboch kôpkach rovnaký. Vieme len, že každý kúsok jedla má byť buď na jednej, alebo na druhej kôpke. Označme prvú kôpku A a druhú kôpku B. Poďme vyskúšať, či budeme vedieť takýmto spôsobom rozdeliť aspoň prvých pár čísel. V riešení budeme na kôpky rozdeľovať čísla 1, 2, 3 atď., pričom budeme mať na mysli kusy jedla, ktoré sú nimi očíslované.

Bez ujmy na všeobecnosti povedzme, že číslo 1 dáme na kôpku A. Číslo 2 nemôžeme umiestniť na tú istú kôpku, pretože jednotka, ktorá je zároveň aj rozdielom čísel 1 a 2, sa tu už nachádza. Na kôpke B zatiaľ nie je nič, 2 sem bez problémov môžeme dať.

Rozdiel čísel 3 a 1 je 2 a rozdiel čísel 3 a 2 je 1. Číslo 3 môžeme dať na hociktorú kôpku, pretože v oboch prípadoch je podmienka splnená. Zatiaľ 3 neumiestnime nikam a pokračujeme so 4. Rozdiel čísel 4 a 2 je 2 a z toho vyplýva, že 4 nemôžeme dať na kôpku B. Na kôpku A ju môžeme dať, pretože $4 - 1 = 3$ a to podmienke vyhovuje. Teraz skúsme znova umiestniť číslo 3. Rozdiel čísel 4 a 3 je 1 teda 3 nemôže ísť na kôpku A. Všimnime si, že tam, kde sa nachádza číslo 1 nemôžeme dať žiadne 2 za sebou idúce čísla, pretože ich rozdiel je 1. Na kôpke B sa nič nezmenilo, stále je tu iba 2, teda 3 sem môžeme položiť.

Keď chceme umiestniť číslo 5, vidíme, že ku 1 a 4 sa to nedá, pretože 4 a 5 sú dve za sebou idúce čísla. 5 sa nedá umiestniť ani na kôpku B, pretože $5 - 3 = 2$ a 2 sa na tejto kôpke nachádza tiež. Čísla 1 až 4 sme umiestnili jednoznačne (až na poradie kôpok). Číslo 5 nevieme dať ani na jednu z kôpok tak, aby bola splnená podmienka zo zadania. Keďže nevieme takýmto spôsobom rozdeliť ani prvých päť čísel, všetky čísla od 1 do 100 sa nám rozdeliť určite nepodarí.

Odpoveď na otázku zo zadania teda znie: Tóno nevie jedlo rozdeliť tak, aby sa rozdiel 2 čísel z jednej skupiny nenachádzal v tej istej skupine.

Komentár. Viacerí z vás úlohu vyriešili veľmi pekne, za čo si zaslúžite pochvalu :) Vo viacerých riešeniach nám však chýbali vysvetlenia a popisy postupov. To by ale mohlo viesť k tomu, že vaše riešenie nepochopíme úplne správne a následne zaň dostanete menej bodov, aj keď ste to mysleli dobre. Napíšte nám teda radšej viac o tom, ako ste na riešenie prišli. To nikdy nebude na škodu :).

2 opravovali **Monča Vaľková** a **Maťo Vodička**

najkrajšie riešenia: Dávid Nguyen

47 riešení

Zadanie

Makrely mali na brušku napísané prirodzené čísla. Makrela je šťastná práve vtedy, keď je ciferný súčet čísla na jej brušku deliteľný siedmimi. Môžu existovať dve šťastné makrely, ktoré majú na brušku napísané po sebe idúce čísla? Aké najmenšie čísla by mohli takéto dve makrely mať?

Vzorové riešenie

Máme zistiť, či existujú dve po sebe idúce čísla, ktoré majú ciferný súčet deliteľný siedmimi. Pokúsime sa aspoň dve také čísla nájsť, a budeme ich volať menšie a väčšie.

Na začiatok jednoduchý fakt: keď sú dva ciferné súčty deliteľné siedmimi, aj ich rozdiel musí byť deliteľný siedmimi. Aký môže byť rozdiel ciferných súčtov dvoch po sebe idúcich čísel? Na prvý pohľad sa zdá, že ak k nejakému číslu prirátame 1, tak sa zmení len cifra na mieste jednotiek (zväčší sa o 1) a rozdiel bude 1, čo nie je deliteľné siedmimi. No ak je na mieste jednotiek menšieho čísla deviatka, tak po pripočítaní 1 sa z nej stane 0 (ciferný súčet sa zmenší o 9) a cifra na mieste desiatok sa o 1 zväčší. Teda ciferný súčet väčšieho čísla bude o $9 - 1 = 8$ menší, čo však stále nie je deliteľné siedmimi.

No čo ak bude aj na mieste desiatok deviatka? Alebo dokonca aj na mieste stoviek? Všeobecne nech posledných n cifier menšieho čísla sú deviatky. Potom ciferný súčet väčšieho čísla sa od ciferného súčtu menšieho čísla zmenší n-krát o 9 (z n 9 sa stanú 0), no cifra pred deviatkami sa o 1 zväčší (pri čísle zloženom len z deviatok je pred nimi 0), teda celkovo sa ciferný súčet zmenší o $9n - 1$.

My chceme, aby to bolo deliteľné siedmimi. Ak za n dosadíme postupne 1, 2, 3, 4 dostaneme 8, 17, 26, 35, a už vidíme, že 35 je deliteľné siedmimi. Teda posledné 4 cifry menšieho čísla sú deviatky a pred nimi už nie je deviatka. Ciferný súčet ďalšieho čísla bude o 35 menší. Teraz už vidíme, že vieme nájsť také čísla. Stačí dať pred 4 deviatky také cifry, aby bol ciferný súčet deliteľný siedmimi (napr. 69999 a 70000, 859999 a 860000,. . .).

V druhej časti úlohy máme nájsť najmenšie také čísla. Vieme, že musia mať aspoň 4 cifry - lebo 4 posledné cifry menšieho čísla musia byť deviatky. Ale $4 \cdot 9 = 36$, takže na začiatok musíme pridať nejakú cifru, aby bol ciferný súčet deliteľný siedmimi. A najlepšie iba jednu, aby bolo číslo čo najmenšie - najbližší násobok 7 väčší ako 36 je 42. Teda pridáme cifru 6 a vznikne 69999 (na cifený súčet 49 alebo viac by sme museli pridať viac cifier). Vidno tiež, že keby viac posledných cifier čísla boli deviatky, tak bude väčšie. Teda 69999 a 70000 sú najmenšie také čísla.

Také makrely môžu existovať, a najmenšie čísla, ktoré môžu mať sú 69999 a 70000.

Komentár. Pri tejto úlohe vyskúšanie všetkých možností nebol dobrý nápad, lebo čísel menších ako 69999 je skrátka veľa. Ak neviete všeky vyskúšať, treba zvoliť iný postup. Fakt, že to pre „malé“ čísla nevychádza, ešte neznamená, že pre vyššie to nevyjde. V skutočnosti je nekonečne veľa možností a vidíte aká je najmenšia. Žiaľ, sa stalo aj to, že ste zadanie nesprávne pochopili. Napríklad ste si mysleli, že makrela môže mať na brušku viac čísel, alebo že o cifrách v jej čísle musí platiť, že sú to za sebou idúce čísla. Toho bola škoda, inak sa vám úlohu podarilo pekne vyriešiť.

3 opravovali **Radka Masloviaková** a **Maťo Rapavý**

najkrajšie riešenia: Šimon Soták, Soňa Feciskaninová

43 riešení

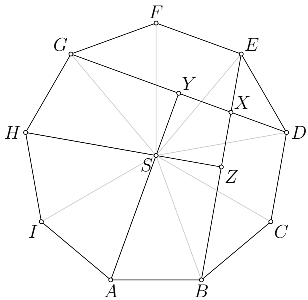
Zadanie

Diera mala tvar pravidelného 9-uholníka *ABCDEFGHI*. Elenka však rátala so všetkým a vzala si so sebou krátku niť. Na to, aby sa Elenke podarilo zašiť dieru, potrebovala vedieť, aký uhol zvierajú priamky *DG* a *BE*. Vypočítajte veľkosť tohto uhla.

Vzorové riešenie

Všimnime si, že úsečky *BE* a *GD* nám rozdeľujú 9-uholník na 2 lichobežníky a to *BCDE* a *GFED*. Tieto lichobežníky sú rovnoramenné, pretože z pravidelného 9-uholníka vieme, že strany *BC* a *ED* resp. *GF* a *DE* sú rovnaké a uhly, ktoré zvierajú s kratšou základňou *CD* resp. *EF* sú tiež rovnaké.

Teraz si veľkosti týchto uhlov vypočítame. Tento 9-uholník si vieme rozdeliť na 9 rovnoramenných trojuholníkov, pričom každý z nich má súčet veľkostí uhlov $180°$. Spolu majú tieto trojuholníky súčet vnútorných uhlov $9 \cdot 180° = 1620°$. Od toho musíme odrátať všetky uhly, ktoré sa nenachádzajú pri stranách 9-uholníka. Tieto uhly tvoria kružnicu, teda súčet týchto uhlov je $360°$. Z toho vyplýva, že všetky uhly na obvode 9-uholníka majú súčet $1620° - 360° = 1260°$. A keďže je takých uhlov 9, potom jeden má veľkosť $1260°/9 = 140°$.



O súčte uhlov v ľubovoľnom 4-uholníku (teda aj v lichobežníku) vieme, že je $360°$. Keďže náš lichobežník je rovnoramenný, tak má pri základniach rovnako veľké uhly. Uhly pri kratšej základni majú veľkosť $140°$ a z toho vyplýva, že uhly pri dlhšej základni majú veľkosť $360° - 2 \cdot 140° = 80°$. Takže jeden má veľkosť $80°/2 = 40°$. Toto platí pre oba lichobežníky *BCDE* aj *GDEF*, ktoré sú zhodné.

Ďalej ste úlohu mohli riešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si tri z nich:

1) Priesečník *BE* a *DG* si označíme ako *X*. Teraz si všimneme trojuholník *DEX*. Uhly *DEX* a *EDX* majú veľkosť $40°$, teda uhol *EXD* má veľkosť $180° - 2 \cdot 40° = 100°$ čo je to, na čo sme chceli prísť.

2) Priesečník *BE* a *DG* si označíme ako *X*. Veľkosť uhla *CDG* si vieme ľahko dopočítať a to je $140° - 40° = 100°$. O stranách *BE* a *CD* vieme, že sú rovnobežné, pretože sú základňami lichobežníka, teda uhly *CDG* a *BXG* sú súhlasné. Z toho

vyplýva, že uhol BXG má rovnakú veľkosť ako uhol CDG, čo je 100° a teda opäť to, čo sme chceli dostať.

3) Keďže ide o pravidelný 9-uholník, tak AS je kolmá na FE (os súmernosti). Ako sme v prvej časti zistili, $FEDG$ je lichobežník, teda AS je kolmá aj na DG. To isté platí pre HS a BE,CD. Priesečník BE a DG si označíme ako X a priesečníky AS a GD resp. HS a BE si označme Y resp. Z. Vo vzniknutom štvoruholníku $SYXZ$ teda poznáme 3 uhly a to $|\sphericalangle SZX| = 90^\circ$, $|\sphericalangle XYS| = 90^\circ$ a $|\sphericalangle BXG| = 80^\circ$, keďže to je vrcholový uhol k uhlu HSA, čo je $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$. Hľadali sme teda $|\sphericalangle ZXY| = 360^\circ - 90^\circ - - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Správne riešenia teda boli 100° a 80°, keďže 80° je veľkosť susedných uhlov BXD a EXG.

Komentár. Táto úloha bola pomerne jednoduchá a až na pár výnimiek väčšina z vás došla k správnemu výsledku. Napriek tomu väčšina z vás nezískala plný počet bodov, pretože v takýchto úlohach je nutné dokazovať. Nestačí prehlásiť, že štvoruholník $DEFG$ je lichobežník, ale treba dokázať, prečo je to lichobežník. Rovnako nestačí prehlásiť, že súčet vnútorných uhlov 9-uholníka je 1260°, ale treba dokázať, prečo je to tak. Ďalej riešenia typu narysoval som a odmeral, nie sú korektným zdôvodnením, že je tomu tak.

4

opravovali **Janka Baranová** a **Mlenka Krejčiová**

najkrajšie riešenie: Henrieta Micheľová, Žaneta Semanišinová

49 riešení

Zadanie

„Rozpílime tú vašu drevenú kraksňu v tvare kocky s hranou dlhou 4 metre na 64 kociek s hranou dlhou 1 meter.“ Bez zmeny polohy rozpílených častí to vedia urobiť deviatimi rezmi. Koľko najmenej rezov by potrebovali piráti, ak by neboli hlúpi a prepílené časti by premiestňovali? Prečo to na menej rezov nevie urobiť nikto?

Vzorové riešenie

V úlohách, kde je potrebné zistiť nejaké minimálne číslo, je vhodné sa s tým najprv hrať a objavovať, ako tam veci fungujú. Časom, keď si už budete istý správnosťou (minimálnosťou) vami objaveného čísla, tak je potrebné spraviť dve veci – ukázať, že to vaše číslo vyhovuje a tiež, že žiadne menšie už nie.
Po zistení, že najmenší možný počet rezov je šesť, je nutné sa pustiť do prvej časti – ukázať, ako sa dá kocka rozdeliť pomocou šiestich rezov na 64 malých kociek. Po chvíľke uvažovania každý z vás takéto rezanie určite objaví, takže túto časť úlohy vo vzorovom riešení vynechávame. V 9-bodovom riešení takéto rezanie samozrejme bolo potrebné uviesť.
Teraz môžeme prejsť na druhú (zložitejšiu) časť úlohy. Ukážeme vám dve riešenia – prvé bolo medzi vami oveľa obľúbenejšie a do budúcna poučnejšie, druhé je menej obvyklé, ale zaujímavé.

1. riešenie:
Jedným rezom vieme každú z častí rozrezať maximálne na dve časti – to znamená, že počet častí sa zdvojnásobí. Predpokladajme teda, že sa to dá na menej ako šesť rezov. Na začiatku máme jeden kus (kocku $4 \times 4 \times 4$), po prvom reze teda dostaneme dve časti, po druhom najviac štyri, po treťom osem, po štvrtom šestnásť a po piatom maximálne 32 častí. To je ale v rozpore s tým, že my potrebujeme 64 častí, teda na menej ako šesť rezov to nejde.
2. riešenie:
Pozrime sa na jednu malú kocku, ktorá sa nachádza vo vnútri kocky – to znamená, že je zo všetkých strán obklopená inými kockami. Keďže táto kocka musí byť na konci samotná, musím ju odrezať od všetkých ostatných. Kocky sa nedajú ohýbať, preto ju musím odrezať od každej steny samostatne – potrebujem na to aspoň šesť rezov.

Komentár.
Táto úloha bola vcelku jednoduchá a mnohí z vás ju pekne vyriešili. Väčšina z tých, ktorí nedostali plný počet bodov, vyriešila iba prvú časť úlohy a na druhú zabudla. Totiž nestačilo ukázať, že sa to dá na šesť (no aj to bolo nutné k dokonalému riešeniu), ale bolo potrebné aj ukázať, že na menej sa to nedá – teda šesť je najmenší možný počet rezov, ktorým by sme kocku rozrezali na 64 malých kociek. Preto by sme vám odporučili si poriadne čítať zadanie, aby ste nemuseli zbytočne strácať body.

5 opravovali **Robko Hajduk** a **Matúš Hlaváčik**
najkrajšie riešenia: Martin Masrna, Dávid Bodnár

30 riešení

Zadanie
„Stavím sa s vami o celú moju loď a môj holý život, že ak na tabuľu napíšeme čísla $1, 2, 3, \dots, 2012$ a 2011-krát nahradíme dve čísla z tabule ich rozdielom, ostane jediné číslo, ktoré bude *párne*.“ Ukážte, prečo mal Tóno pravdu. Aké najväčšie číslo vieme takto na konci dostať?

Vzorové riešenie
Táto úloha má 2 časti: Ukázať, že má Tóno pravdu, a zistiť, aké najväčšie číslo tam môže byť. Prvá časť sa dala riešiť dvoma spôsobmi:
Najprv si všimnime, ako sa to správa, keď od seba odčítavame čísla:

- párne - párne = párne
- párne - nepárne = nepárne
- nepárne - párne = nepárne
- nepárne - nepárne = párne

Počet nepárnych čísel je $2012/2 = 1006$ (keďže máme 2012 čísel, z ktorých každé druhé číslo je nepárne), a teda je tam tiež $2012/2 = 1006$ párnych čísel.
Pri prvom type odčítania sa počet nepárnych čísel nemení.

Pri druhom a treťom type zmažeme jedno nepárne a ďalšie tam napíšeme (rozdiel), takže sa ich počet tiež nemení. Pri štvrtom type odčítania zmažeme dve nepárne a napíšeme jedno párne (rozdiel), teda sa počet nepárnych čísel zmenší o 2.

Keď to zhrnieme, tak počet nepárnych čísel sa buď nemení alebo sa zmenší o 2.

My chceme ukázať, že na konci vždy ostane párne číslo, inými slovami, že tam nikdy nezostane nepárne. Keďže počet nepárnych čísel je párny (1006) a po vymazaní sa tento počet nezmení alebo klesne o 2, tak vždy ostane párny. Ak by však na konci zostalo nepárne číslo, tak počet nepárnych čísel by bol 1, čo však určite nie je párny počet, teda táto situácia nastať nemôže. Na konci musí byť teda vždy párne číslo. Tóno mal pravdu.

Riešenie 2:

Všimnime si celkový súčet čísel $1, 2, \ldots, 2012$, ktorý je párny, keďže je tam párny počet nepárnych čísel (1006).

Pri prvom type odčítania sa parita (vlastnosť čísla byť párnym alebo nepárnym) nemení. Ak odčítame (zmažeme) dve párne čísla a jedno párne pripočítame (pripíšeme), tak sa parita súčtu nezmení.

Pri druhom a treťom type sa parita tiež nemení, keďže odčítame jedno párne a jedno nepárne (parita sa zmení), a potom pripočítame nepárne číslo (čím sa parita zmení naspäť).

Pri štvrtom type odčítania sa parita taktiež nemení, keďže odčítavame dve nepárne čísla (parita sa nemení) a pripočítame jedno párne číslo.

Zistili sme, že parita súčtu sa nikdy nemení, teda ak je na začiatku súčet párny (čo je), tak aj na konci (keď bude už iba jedno číslo), tak súčet bude stále párny, teda aj to posledné číslo bude párne. Tóno mal pravdu.

Teraz nám už stačí zistiť, aké najväčšie číslo môže zostať na tabuli. Rozdiel čísel je vždy kladný a menší nanajvýš rovný väčšiemu z čísel, ktorých rozdiel robíme. Najväčšie číslo, čo máme k dispozícii je 2012, teda to je teoreticky najväčšie číslo, ktoré nám môže na konci zostať. Stačí nájsť spôsob, akým by sa to dalo dosiahnuť. Dá sa to napríklad takto:

Čísla 1 a 2012 si necháme na boku a ostatné popárujeme a odčítame od seba takto: $2011 - 2010$, $2009 - 2008, \ldots, 5 - 4$, $3 - 2$. Získame tým 1005 jednotiek a 1-ku a 2012-ku, čo sme „odložili“ bokom. Keďže máme párny počet jednotiek (1006), tak ich môžeme spárovať a odčítať, čím získame 503 núl. Tie potom postupne všetky odčítame od 2012, ktorá nám ostane sama ako najväčšie posledné číslo.

Komentár.

Mnohí z vás ste mali v prvej polovici správne myšlienky, len ste ich nedotiahli dokonca. Niektorí ste ukázali jeden príklad, ako mohol odčítavať, ale to nie je úplný dôkaz, pretože my sme tie operácie odčítavania mohli robiť v hocijakom poradí a stále nám zostalo párne číslo.

V druhej časti ste sa niektorí snažili odčítavať väčšie číslo od menšieho a tak dostať najväčšie číslo, čo zadanie nezakazovalo. Vtedy ste od 1-ky odčítali všetky čísla okrem jedného, od ktorého ste potom odčítali to záporné číslo a ako výsledné číslo vám vyšlo 2 025 076. Aj takéto riešenie sme uznali ako korektné, nakoľko to v zadaní nebolo úplne presne povedané.

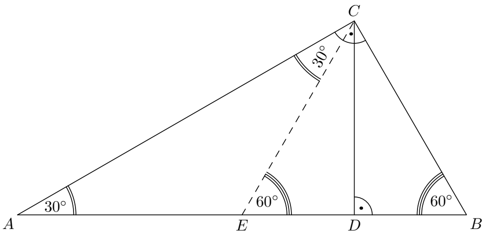
6 opravovali **Deniska Semanišinová** a **Matúš Stehlík** 42 riešení
najkrajšie riešenia: Daniel Koľ, Dávid Bodnár

Zadanie

Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú v pomere $1:2:3$ a najkratšia strana BC má dĺžku 1 cm. V akom pomere delí najdlhšiu stranu AB päta výšky z vrcholu C?

Vzorové riešenie

Medzi vašimi riešeniami sa najčastejšie nachádzali dva spôsoby riešenia. Teraz ich obidva ukážeme:
1. spôsob:
Vieme, že uhly v trojuholníku sú v pomere $1:2:3$. Ak teda najmenší z nich označíme x, tak ostané majú veľkosti $2x$ a $3x$. Ich súčet je potom $x+2x+3x=6x$. Súčet všetkých vnútorných uhlov trojuholníka je však $180°$, čiže $6x=180°$, teda $x=30°$. Veľkosti uhlov sú preto $30°$, $60°$ a $90°$.
Teraz už môžeme načrtnúť trojuholník. Pri vrchole C je pravý uhol (keďže oproti najdlhšej strane AB musí byť najväčší uhol), pri vrchole A uhol veľkosti $30°$ (najkratšou stranou je BC a oproti najkratšej strane je vždy najmenší uhol) a pri vrchole B uhol veľkosti $60°$. Pätu výšky z vrcholu C označme D.



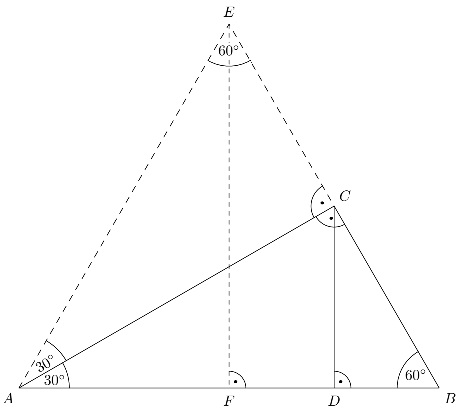
Na strane AB zostrojme bod E tak, aby $|\sphericalangle BCE| = 60°$. Keďže aj $|\sphericalangle EBC| = 60°$, tak $|\sphericalangle CEB| = 180° - 2\cdot 60° = 60°$. Všetky uhly trojuholníka BEC majú rovnakú veľkosť, takže je rovnostranný. Z toho vieme určiť, že $|EC| = |EB| = |BC| = 1\,\text{cm}$. Zároveň vieme, že päta výšky delí v rovnostrannom trojuholníku stranu napoly, čiže $|BD| = |DE| = 0{,}5\,\text{cm}$.
Teraz si všimnime trojuholník ACE:

$$|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle BCE| = 90° - 60° = 30°.$$

Keďže aj $|\sphericalangle CAE| = 30°$, tak trojuholník ACE je rovnoramenný s ramenami AE a EC. Zistili sme, že $|EC| = 1\,\text{cm}$, teda aj $|AE| = 1\,\text{cm}$.
Teraz už máme všetko na to, aby sme vypočítali pomer $|AD| : |DB|$. Vieme, že $|DB| = 0{,}5\,\text{cm}$ a $|AD| = |AE| + |ED| = 1\,\text{cm} + 0{,}5\,\text{cm} = 1{,}5\,\text{cm}$. Hľadaný pomer je teda

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{3}{1}.$$

2.spôsob:
Podobne ako pri prvom spôsobe riešenia vieme vyjadriť veľkosti uhlov a načrtnúť trojuholník ABC.



Teraz však zostrojíme bod E tak, že bude ležať na polpriamke BC a $|EC| = |BC| = 1\,\text{cm}$ (samozrejme je rôzny od B). Trojuholníky ABC a AEC sú zhodné podľa vety *sus* ($|AC| = |AC|$, $|BC| = |EC|$ a $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ECA| = 90°$). Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva, že $|\sphericalangle CAE| = 30°$ a $|\sphericalangle AEC| = 60°$. Keďže $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle BAE| = 60°$, tak trojuholník ABE je rovnostranný. Potom platí $|AB| = |EB| = 2 \cdot 1\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$.
Na strane AB teraz zostrojme bod F tak, že úsečka FE je výškou na stranu AB v trojuholníku ABE. Trojuholník ABE je rovnostranný, a preto bod F leží v strede strany AB.
Pozrime sa teraz na trojuholník FBE. Keďže priamky FE aj CD sú obidve kolmé na AB, tak FE a CD sú rovnobežné. Navyše bod C je stredom strany BE, čiže CD je stredná priečka v trojuholníku BEF. Bod D preto leží v strede strany BF. Keďže F je stredom AB, tak $|BF| = |AB|/2 = 1\,\text{cm}$ a keďže D je stredom BF, tak $|BD| = |BF|/2 = 0{,}5\,\text{cm}$. Zistili sme, že $|DB| = 0{,}5\,\text{cm}$, teda $|AD| = |AB| - |BD| = 1{,}5\,\text{cm}$, teda pomer $|AD| : |BD| = 1{,}5 : 0{,}5 = 3 : 1$.

Komentár.
Na to, že to nebola ani zďaleka ľahká úloha, ste ju zvládli perfektne. Väčšina z vás ju mala vyriešenú správne, prípadne s malými chybami. Našlo sa len málo takých, ktorí ju vôbec nevedeli vyriešiť. Jediná často opakovaná chyba bola, že ste trojuholník narysovali a odmerali dĺžky strán. Rysovanie a meranie však nikdy nie je presné, čo ak by ten pomer bol 2,9 : 1? Presne vieme pomer zistiť vždy len výpočtom.

Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1.	Henrieta Micheľová	Kvarta A	GAlejKE	51	9	9	9	9	9	9	105
2.	Samuel Krajči	Prima	GAlejKE	52	9	9	7	9	-	9	104
3.	Zoltán Hanesz	8. A	ZKuzmKE	50	8	9	7	9	9	9	102

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
4.	Soňa Feciskaninová	Kvarta A	GAlejKE	49	9	9	9	5	9	9	99
5.	Kristína Mišlanová	Kvarta A	GAlejKE	45	9	9	8	9	8	9	97
6.	Šimon Soták	Kvarta A	GAlejKE	46	8	8	7	9	9	9	96
7.	Žaneta Semanišinová	Kvarta A	GAlejKE	43	9	9	7	9	9	9	95
8.	Dávid Nguyen	Kvarta A	GAlejKE	41	9	9	9	9	8	9	94
9.	Jakub Genči	8. A	ZKro4KE	41	9	9	7	5	9	9	91
10.	Martin Masrna	7. B	ZKro4KE	45	9	8	2	7	9	3	90
11.	Matej Genči	7. A	ZKro4KE	42	9	8	5	6	4	9	88
12.	Juraj Mičko	8. B	ZKro4KE	42	8	7	7	7	3	9	87
13.	Nikola Svetozarov	7. B	ZKro4KE	38	9	8	6	6	-	9	85
14.	Ivan Vanát	Kvarta A	GAlejKE	43	9	7	7	9	-	9	84
15. – 16.	Dávid Bodnár	Kvarta A	GAlejKE	44	9	0	7	5	9	9	83
	Petra Plšková	9. A	ZStarKE	41	9	9	9	9	5	1	83
17.	Peter Onduš	Sekunda A	GAlejKE	32	8	8	9	3	6	9	81
18. – 19.	Patrik Hohoš	Kvarta A	GAlejKE	34	9	9	8	6	5	9	80
	Martin Majerčák	Kvarta A	GAlejKE	33	8	8	7	9	6	9	80
20.	Katarína Kuľková	7. A	ZSDrienov	40	7	4	9	6	-	3	78
21. – 22.	Kristína Bratková	7. A	ZKe30KE	42	1	0	3	9	9	3	76
	Alžbeta Ivašková	8. B	ZKro4KE	30	7	8	8	7	-	9	76
23. – 25.	Tereza Volavková	9. A	ZKro4KE	38	9	7	4	2	8	3	71
	Ján Michalov	Kvarta A	GAlejKE	30	9	9	7	2	5	9	71
	Tomáš Tóth	7. A	ZKro4KE	34	8	3	6	2	-	9	71
26.	Slavomír Hanzely	Kvarta	GKomeSB	36	1	8	1	8	7	9	70
27.	Peter Čulen	7. A	ZKro4KE	32	2	0	8	7	2	9	69
28.	Veronika Schmidtová	8. B	ZKro4KE	27	6	4	7	9	-	9	66
29.	Natália Česánková	7. A	ZHvieLY	36	4	0	4	8	1	3	64
30.	René Michal Cehlár	9. A	ZKro4KE	34	2	8	9	7	3	-	63
31.	Juraj Jursa	Sekunda B	GAlejKE	29	9	3	0	2	-	8	60
32. – 33.	Daniel Onduš	Kvarta A	GTr12KE	30	5	4	4	5	3	5	56
	Jakub Hlaváčik	Kvarta B	GAlejKE	26	9	-	8	9	4	-	56
34.	Adam Õrhalmi	9. A	ZKro4KE	28	7	1	7	7	2	3	55
35.	Max Õrhalmi	Sekunda A	GAlejKE	24	4	1	1	5	1	3	43
36.	Jakub Mach	8. B	ZKro4KE	33	-	-	7	-	-	-	40
37. – 38.	Adam Kalivoda	7. A	ZKro4KE	16	8	2	-	-	-	-	34
	Roxana Rajtáková	7. A	ZKro4KE	21	5	1	-	-	0	2	34
39. – 40.	Daniel Koľ	8. A	ZKro4KE	11	-	-	-	6	-	9	26
	Lenka Tomčíková	9. A	ZPPapBJ	7	1	0	4	7	-	7	26
41. – 43.	Lucia Hlaváčiková	7. B	ZGemeKE	22	-	-	-	-	-	-	22
	Tara Stefányi	9. A	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	22
	Martina Horváthová	8. B	ZKro4KE	12	8	-	-	2	-	-	22
44.	Michal Čabra	7. B	ZŽdaňa	19	-	0	0	0	-	1	21
45. – 46.	Alexandra Fabianová	7. A	ZKro4KE	20	-	-	-	-	-	-	20
	Lucia Lenártová	9. A	ZPPapBJ	12	-	3	1	2	-	2	20
47. – 48.	Eduard Lavuš	8. B	ZKro4KE	17	-	-	-	2	-	-	19

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
	Natália Tóthová	7. B	ZKro4KE	19	-	-	-	-	-	-	19
49. – 50.	Viktória Fenčáková	7. B	ZKro4KE	11	3	0	-	1	0	-	18
	Petra Demjanovičová	7. A	ZBajkPO	10	-	0	-	0	-	4	18
51.	Ivana Bernasovská	8. B	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	17
52. – 54.	Matej Kyjovský	8. A	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	9	16
	Richard Garlík	8. A	ZKro4KE	7	-	3	4	2	-	-	16
	Matej Dubinský	7. A	ZKro4KE	9	-	0	0	1	0	3	16
55. – 56.	Jakub Ivanecký	7. A	ZKro4KE	9	2	0	2	-	-	-	15
	Anna Mária Kubincová	7. C	ZNov2KE	15	-	-	-	-	-	-	15
57.	Peter Vaňo	8. A	ZKro4KE	4	-	-	-	3	-	7	14
58.	Zuzana Nadzamová	7. B	ZKro4KE	11	-	0	1	-	-	-	13
59. – 61.	Adam Skybjak	8. B	ZKro4KE	11	-	0	-	-	-	-	11
	Karin Brandeburová	8. A	ZKro4KE	11	-	-	-	-	-	-	11
	Martin Zdravecký	7. A	ZKro4KE	11	-	-	-	-	-	-	11
62. – 63.	Samuel Kurucz	8. A	ZKro4KE	7	-	-	-	3	-	-	10
	Dominik Stripan	9. A	ZKro4KE	10	-	-	-	-	-	-	10
64. – 65.	Matej Repka	9. B	ZNámePO	9	-	-	-	-	-	-	9
	Peter Poláček	8. A	ZKro4KE	7	-	-	-	2	-	-	9

Poradie na 66. - 79. mieste nájdete na stránke *http://matik.strom.sk*

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 3 • Zimná časť 25. ročníka (2011/12) • Vychádza 1. decembra 2011
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`