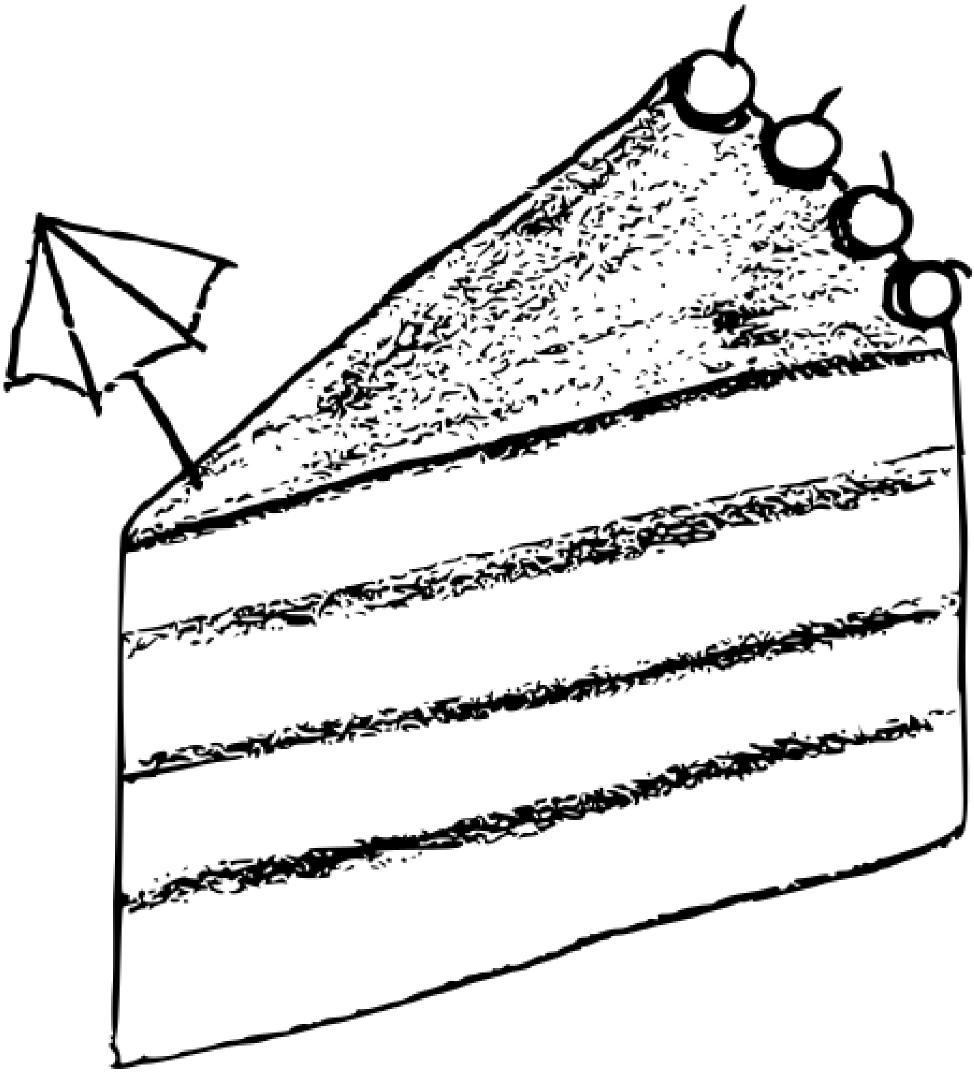
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 5 — Ročník 33 matik.strom.sk



Ahojte!

Prvá séria je úspešne za nami a my vám znovu prinášame nový diel časopisu, v ktorom sa dozviete, ako dopadla. Okrem tabuľky tu nájdete aj super vzoráky a ďalšie krásne úlohy. Boj o bodíky sa ešte neskončil, preto šup-šup riešiť druhú sériu. Na vaše kreatívne riešenia sa tešia

vaši milovaní vedúci MATIKa

Ako bude

Tábor mladých matematikov

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Tábore mladých matematikov. Môžeš sa tešiť na neopakovateľný program, zábavne podanú matiku a príjemnú spoločnosť.

TMM sa bude konať 16. – 23. augusta v Penzióne pod Sitnom na Počúvadlianskom jazere a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletné informácie aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke. Nenechávaj si prihlásenie na poslednú chvíľu, lebo počet miest je obmedzený. Tešíme sa na teba.

Vzorové riešenia 1. série úloh letného semestra

1 opravovali **Róbert Sabovčík** a **Štefan Vašak** 53 riešení
najkrajšie riešenie: Dávid Kepič

Zadanie

Pri vstupe do obchodu odovzdal Jumpy všetky svoje peniaze, ktoré mal pri sebe. Pri odchode dostal dvojnásobok odovzdanej sumy, ale potom ešte zaplatil poplatok 24 peňazí. Takto chvíľu vchádzal a vychádzal z obchodu, až kým pred vstupom nezistil, že už nemá žiadne peniaze. Koľko peňazí mohol mať Jumpy na začiatku? Nájdite všetky riešenia, ak sa dajú mať len celé peniaze (neexistujú žiadne čiastkové peniaze ako napríklad polovičné).

Riešenie

Označme si x počet peňazí, ktoré mal Jumpy pred vstupom do obchodu. Jumpy príde do obchodu, odovzdá všetky svoje peniaze. Potom však dostane ich dvojnásobok naspäť, čiže z x sa stane $2x$, zaplatí 24 a bude mať $2x - 24$. Označme si y počet peňazí, s ktorými odíde. Už sme si ho vyjadrili ako x, čo vieme reprezentovať rovnicou $y = 2x - 24$.
Pozrime sa na úlohu odzadu a rozdeľme si možnosti podľa toho, koľkokrát bol Jumpy v obchode.
Jedenkrát: Po poslednom odchode má mať Jumpy presne 0. Ak 0 dosadíme namiesto y do rovnice tak jednoducho vieme dopočítať x, čiže peniaze, s ktorými prišiel do obchodu. Ak $0 = 2x - 24$, tak potom po pričítaní 24 $24 = 2x$, a teda x je v tomto prípade 12. Vieme však, že Jumpy mohol do obchodu vojsť aj viac ako jeden raz.
Dvakrát: Vieme, že po jeho prvej návšteve mal 12 peňazí (aby po druhej mohol mať 0). Aby sme zistili, koľko mal pred prvou návštevou, opätovne dosadíme 12 na miesto y do rovnice a dostávame $12 = 2x - 24$, takže $36 = 2x$, $x = 18$.
Trikrát: Rovnakým postupom, po dosadení 18 za y dostávame $18 = 2x-24$, $42 = 2x$, $x = 21$.
Štyrikrát: Po dosadení $y = 21$ dostávame $21 = 2x - 24$, $x = 22,5$. Tu ale nastáva problém, pretože čiastkové peniaze neexistujú. Je podstatné si uvedomiť, že celý proces v obchode je jednoznačný, z každého počtu peňazí, s ktorými prichádza, dostaneme práve jeden počet peňazí, s ktorými odchádza, a taktiež každý počet peňazí, s ktorými odchádza, je možné dostať len z jedného počtu peňazí, s ktorými prichádza. Jumpy tým pádom nikdy nemohol vyjsť z obchodu s 21. Preto sa tu náš postup končí. Riešeniami sú čísla 12, 18, 21.

Iné riešenie

Opäť si spravíme rovnicu $y = 2x - 24$ ako v predchádzajúcom riešení. Skúsme nájsť najväčšie a najmenšie x, ktoré nám vyhovuje (hľadáme také x, aby sa nám obnos peňazí stále zmenšoval. Inak by Jumpy o peniaze nikdy neprišiel):

Najmenšie x, ktoré vyhovuje, je 12. Ak by sme totiž dosadili za x čísla menšie ako 12, tak by hodnota $2x$ bola menšia ako 24, a tak by Jumpy nemal z čoho zaplatiť poplatok 24 pri odchode. Najväčšie x, ktoré vyhovuje, je 23. Pre $x = 24$ by sa jeho počet peňazí po návšteve nezmenil, lebo $2 \times 24 - 24 = 24$. Ak by sme za x dosadili 25 alebo viac, Jumpy by si dokonca zarobil. Ak sa bližšie pozrieme na výraz, zistíme, že by sme ho v tomto prípade vedeli rozpísať na $x + x - 24$, pričom x je pôvodný obnos peňazí a $x - 24$ je určite viac ako 0, lebo $x > 24$, a teda súčet $x + x - 24$ je určite väčší ako x.
Teraz, keď už máme ohraničenie $11 < x < 24$, môžeme nájsť riešenia buď tak, ako v prvom riešení, alebo môžeme vyskúšať všetky možnosti. V tomto prípade dosadíme skúšané číslo za x. Obnos y, ktorý nám vyjde, opätovne dosádzame na miesto x, až kým nám nevyjde 0 (v tomto prípade máme riešenie) alebo záporné číslo (v tomto prípade číslo nie je riešením). Tu je dôležité poukázať na to, že vo vašom riešení je potrebné všetky tieto možnosti vyskúšať a nielen povedať, že ste tak spravili. Oboma spôsobmi sa dopracujeme k riešeniam 12, 18, 21.

Komentár

K správnemu výsledku sa dopracovala väčšina z vás, čo nás samozrejme veľmi teší. Vzhľadom na možno nejednoznačné zadanie z našej strany sme za správne uznávali aj riešenia, ktoré 12 vylúčili, lebo si mysleli, že Jumpy musel do obchodu ísť viac ako raz. Najčastejšie ste body strácali, ak ste sa úlohu pokúsili vyriešiť druhým spôsobom, ale nevysvetlili ste dobre ohraničenie, ktoré bolo pre tento spôsob riešenia kľúčové. Táto chyba nás veľmi mrzí, nakoľko je pomerne zbytočná, keďže to vysvetlenie ste si pravdepodobne sformulovali v hlave, no nepovažovali ste ho za podstatné. Ostatné chyby boli zriedkavejšie a šlo o chyby podobného charakteru. Celkovo sme ale veľmi spokojní s tým, ako ste sa s touto úlohou popasovali.

2

opravovali **Dano Onduš** a **Ľubo Vargovčík**
najkrajšie riešenia: Braňo Ječim a Samo Osuský

55 riešení

Zadanie

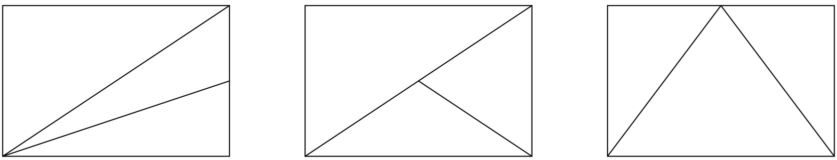
Obdĺžnikový koláč, ktorý vážil 6 kg, si rozdelili traja ľudia. Najprv koláč rozrezali na dva kusy. Potom jeden z týchto kusov znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky, pričom každý človek si zobral jeden. Jeden z nich mal kúsok ťažký ako aritmetický priemer hmotností zvyšných dvoch. Koľko vážili kúsky koláča, ak viete, že koláč má všade rovnakú konzistenciu?

Riešenie

Keďže koláč má všade rovnakú konzistenciu, môžeme počítať namiesto hmotnosti s obsahom obdĺžnika. Čiže koláč má obsah 6. Podľa zadania bol rozdelený na tri trojuholníky, ich obsahy označíme x, y a z. Vieme, že $x + y + z = 6$, a tiež, že jeden trojuholník má obsah rovný aritmetickému priemeru obsahov zvyšných dvoch trojuholníkov. To zapíšeme takto: $x = (y + z)/2$. Pravú stranu môžeme dosadiť za x do prvej rovnice a potom ju upraviť.

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2} + y + z &= 6, \\ y + z + 2y + 2z &= 12, \\ y + z &= 4, \end{aligned}$$

z čoho už plynie, že $x = 2$.
Poďme sa pozrieť, ako môžeme rozrezať koláč. Prvým rezom musíme obdĺžnik rozdeliť tak, aby vznikol aspoň jeden trojuholník. Ak prvým rezom spojíme dve protiľahlé strany obdĺžnika, vznikli by nám dva štvoruholníky a druhým rezom by sme iba z jedného z nich dokázali spraviť trojuholník, čiže by sme na konci nemali tri trojuholníky. Ak prvým rezom spojíme dve priľahlé strany obdĺžnika, vznikne nám trojuholník a päťuholník, lenže druhým rezom päťuholník už nedokážeme rozdeliť na dva trojuholníky. Čiže prvý rez musí ísť z jedného vrcholu obdĺžnika buď do toho protiľahlého vrcholu, alebo na stranu obdĺžnika.
V prvom prípade sme dostali dva rovnaké trojuholníky a následne druhým rezom jeden z nich rozdelíme na dva trojuholníky, čo vieme spraviť dvoma spôsobmi. Môžeme viesť rez buď od prvého rezu k vrcholu obdĺžnika, alebo z vrcholu, z ktorého išiel prvý rez, na stranu. V druhom prípade sme dostali trojuholník a štvoruholník, takže štvoruholník musíme rozdeliť na dva trojuholníky, čo sa dá iba rezom po jednej z jeho uhlopriečok. Preto všetky možné rozrezania obdĺžnika vyzerajú takto:



Vidíme, že buď je jeden rez uhlopriečkou, čiže obsah veľkého trojuholníka je polovica obdĺžnika, čo je 3, alebo je najväčší trojuholník ten v strede. Všimnime si, že jedna z jeho strán je aj stranou obdĺžnika. Výška tohto trojuholníka má rovnakú dĺžku ako kratšia strana obdĺžnika. Obsah celého obdĺžnika je $a \cdot b$, obsah trojuholníka vieme vyrátať ako $(a \cdot b)/2$, čo je znova polovica obdĺžnika.
Vieme, že $x = 2$, $y = 3$, teda $z = 6 - x - y = 1$.

Komentár

Teší nás, že takmer všetci ste našli správne riešenie, nanešťastie, často ste neukázali, že žiadne iné neexistuje. Mnohí z vás sa zaoberali iba celočíselnými riešeniami, no v zadaní sa nepísalo, že hmotnosti koláčov boli celé čísla. Rovnako ste zabúdali zdôvodniť, prečo sa koláč dá rozrezať iba tak, ako na obrázku, prípadne vám nejaké rozrezanie chýbalo.

3

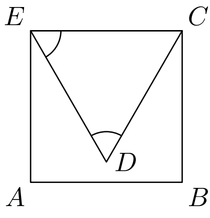
opravovali **Žanetka Semanišinová** a **Mirka Horváthová** • 51 riešení
najkrajšie riešenia: Evička Krajčiová a Tomáš Kubrický

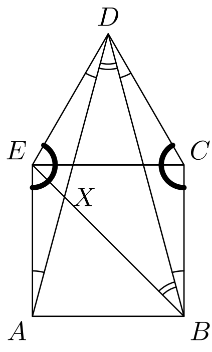
Zadanie

Požiarny evakuačný plán v tvare päťuholníka $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé a uhly pri strane AB sú pravé. Bod X je priesečník úsečiek AD a BE. Dokážte, že $|DX| = |BX|$.

Riešenie

Päťuholník najskôr priamkou EC rozdelíme na štvorec $ABCE$ a rovnostranný trojuholník CDE. Poďme si však najskôr ukázať, že to tak naozaj je.
V štvoruholníku $ABCE$ platí, že $|AE| = |BC|$. Označme si túto dĺžku a. Zo zadania vieme, že priamky AE a BC sú kolmé na priamku AB, teda priamka EC je od bodu A aj od bodu B vzdialená a. Preto platí, že priamka EC je rovnobežná s AB (ak by ste si tým neboli istí, predstavte si, že vedieme cez bod C rovnobežku s AB, vzdialenú od priamky AB našu dĺžku a, potom bude prechádzať bodom E, takže je to priamka EC). Dostávame, že $ABCE$ je rovnobežník s dvoma susednými uhlami pravými, takže $|AB| = |BC| = |CE| = |AE| = a$ a náš štvoruholník $ABCE$ je naozaj štvorec. Strana $|EC|$ je rovnako dlhá ako všetky ostatné strany nášho päťuholníka, čiže trojuholník CDE je rovnostranný a všetky jeho uhly majú 60°.





Náš päťuholník môže vyzerať dvojako. Buď bod D leží v štvorci $ABCE$, alebo mimo neho. V prvom prípade, ak bod D leží v štvorci $ABCE$, sa nám úsečky AD a BE nikde nepretnú (ak by sa mali pretnúť, tak by uhly CED a CDE museli mať najviac 45°, no my vieme, že majú 60°), preto musíme uvažovať druhý prípad, a to ten, keď bod D leží mimo tohto štvorca.
Trojuholník ADE je rovnoramenný trojuholník so základňou AD. Pozrime sa na jeho uhly: $|\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle CEA| + |\sphericalangle CED| = 90° + 60° = 150°$, $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle ADE| = (180°–150°) : 2 = 30° : 2 = 15°$, keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Ďalším rovnoramenným trojuholníkom je trojuholník BCD so základňou BD. V ňom $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle ECD| = 90° + 60° = 150°$. Potom máme $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle BDC| = (180°–150°) : 2 = 30° : 2 = 15°$.
Teraz sa pozrime na uhly $\sphericalangle ADB$ a $\sphericalangle EBD$. $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE| - |\sphericalangle ADE| - |\sphericalangle CDB| = 60° - 15° - 15° = 30°$, $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle EBC| - |\sphericalangle DBC| = 45° - 15° = 30°$.

$\sphericalangle ADB$ je ten istý uhol ako $\sphericalangle XDB$. Podobne $\sphericalangle EBD$ je ten istý ako $\sphericalangle XBD$. Keď sa teraz zameriame na trojuholník BXD, tak $|\sphericalangle XBD| = |\sphericalangle XDB| = 30°$, je to teda rovnoramenný trojuholník so základňou BD a pre ramená platí $|BX| = |DX|$, čo sme chceli dokázať.

Komentár

Najčastejšia chyba bola v tom, že veľká väčšina z vás ani nespomenula, že po rozdelení päťuholníka úsečkou EC nám vzniknú štvorec a rovnostranný trojuholník. Ak áno, tak vôbec nebolo spomenuté, prečo. Taktiež ste v mnohých prípadoch zabudli na to, že bod D by teoreticky mohol ležať v štvoruholníku $ABCE$ a automaticky ste si ho načrtli mimo.

4 opravovali **Peťo Kovács** a **Erik Novák**

najkrajšie riešenie: Lucka Chladná

47 riešení

Zadanie

Multikulti číslo je také číslo, ktoré má všetky cifry navzájom rôzne. Ku každému multikulti číslu vieme vytvoriť itlukitlum číslo tak, že otočíme poradie jeho cifier (napríklad 1357 na 7531 alebo 450 na 54). Aké najmenšie a aké najväčšie 5-ciferné číslo môžeme získať sčítaním multikulti a k nemu príslušného itlukitlum čísel?

Riešenie

Poďme najprv nájsť najväčší päťciferný súčet *multikulti* (označme $\mathcal{M}$) a *itlukitlum* čísla (označme $\mathcal{I}$). Budeme sčítať päťciferné $\mathcal{M}$ číslo s jeho $\mathcal{I}$ číslom, pretože ak by sme sčítavali šesťciferné alebo viacciferné $\mathcal{M}$ číslo s jeho $\mathcal{I}$ číslom, určite by sme dostali súčet, ktorý je viac ako päťciferný, a ak by sme sčítavali $\mathcal{M}$ číslo, ktoré je štvorciferné alebo menejciferné, s jeho $\mathcal{I}$ číslom, určite by sme nedosiahli väčší súčet ako súčet päťciferného $\mathcal{M}$ s jeho $\mathcal{I}$ číslom.

Sčítavame číslo v tvare $\overline{ABCDE}$ s číslom v tvare $\overline{EDCBA}$, kde jednotlivé písmená označujú cifry. Hodnota čísla $\overline{ABCDE}$ je vlastne $10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$ a $\overline{EDCBA}$ ako $10000 \cdot E + 1000 \cdot D + 100 \cdot C + 10 \cdot B + A$. Súčet týchto čísel je $10001 \cdot A + 1010 \cdot B + 200 \cdot C + 1010 \cdot D + 10001 \cdot E$, čo vieme zapísať skrátene ako $10001 \cdot (A + E) + 1010 \cdot (B + D) + 200 \cdot C$.

Poďme si prejsť rôzne hodnoty, ktoré môže nadobudnúť súčet $A + E$. Ak by platilo, že súčet $A + E$ je väčší ako 9, tak výsledný súčet by bol aspoň 100010, a teda by už nebol päťciferný.

Ak by platilo $A+E = 9$, tak je súčet v tvare $90009+1010\cdot(B+D)+200\cdot C$. Najväčšie päťciferné číslo je 99999, nuž hľadáme najväčšiu možnú hodnotu $1010 \cdot (B + D) + 200 \cdot C$ menšiu ako $99999 - 90009 = 9990$. Najväčšia hodnota, akú môže súčet $B + D$ nadobúdať, je 9, pretože ak by bola 10 alebo viac, presiahli by sme 9990. Určili sme, že $A+E = B+D = 9$, takže náš súčet je v tvare $90009+9090+200\cdot C$. Chceme teraz nájsť najväčšiu hodnotu $200 \cdot C$ takú, že nepresiahne 99999–99099 = 900. Vidíme, že najväčšia hodnota je pre $C = 4$, pretože pre $C \geq 5$ by už $200 \cdot C$ presiahlo 900. Najväčšie číslo, ktoré sme dostali pre prípad $A+E = 9$, je $90009+9090+800 = 99899$. Dodajme ešte, že nám nepomôže zmenšiť hodnotu $B+D$, pretože ak by sme ju znížili aspoň o jedna, súčet by sa zmenšil o 1010, čiže by sme museli C navýšiť o viac ako 5, aby sme túto stratu vykompenzovali, čo nemôžeme, keďže C je cifra a nemôže byť väčšia ako 9. Preto táto možnosť nevedie k vyššiemu číslu.

Pozrime sa na prípad $A+E \leq 8$. Najväčšia hodnota, akú môže $B+D$ nadobúdať, je $8+9 = 17$, keďže cifry $\mathcal{M}$ sú rôzne. C je cifra, jej maximálna hodnota je 9. Ak by sme aj uvažovali tieto maximálne hodnoty, dostali by sme $10001 \cdot 8 + 1010 \cdot 17 + 200 \cdot 9 = 80008 + 17170 + 1800 = 98978$, čo je menšie ako 99899.

Spomedzi všetkých prípadov najväčšie číslo, ktoré sme mohli dosiahnuť, bolo 99899. Overme ešte, či sa toto číslo dá dosiahnuť sčítaním $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ čísla. Áno, dá, napríklad $67423 + 32476 = 99899$.

Teraz nájdime najmenší súčet $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ čísla. Budeme sčítať štvorciferné $\mathcal{M}$ číslo s jeho $\mathcal{I}$, pretože sčítaním dvoch trojciferných alebo menejciferných čísel nedosiahnem päťciferné číslo. Päťciferné čísla nemá zmysel sčítavať, pretože najmenšie päťciferné $\mathcal{M}$ je 10234, teda súčet ľubovoľného päťciferného $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ čísla musí byť väčší ako 10234. Nám sa ale podarí ďalej v riešení nájsť menší súčet.

Sčítavame číslo v tvare $\overline{ABCD}$ s číslom v tvare $\overline{DCBA}$, čo si ako v predchádzajúcom prípade môžeme upraviť na súčet $1001 \cdot (A + D) + 110 \cdot (B + C)$. Poďme rozobrať rôzne hodnoty súčtu $A + D$.

Ak je $A+D \leq 8$, tak najväčší súčet, aký môžeme dosiahnuť, je $8008+110 \cdot (8+9) = 9878$, čo je menej ako päťciferné.

Ak $A + D = 9$, náš súčet je v tvare $9009 + 110(B + D)$. Najmenšia hodnota $B + D$ taká, aby bol súčet päťciferný, je $B+C = 10$, odkiaľ $110 \cdot (B+C) = 1100$. Dostávame súčet $9009 + 1100 = 10109$.

Ak $A+D = 10$, tak súčet je v tvare $10010+110 \cdot (B+C)$. Už teraz je päťciferný, nuž chceme dosadiť čo najmenšiu hodnotu za $B+C$. Tá, keďže cifry musia byť rôzne, je $0 + 1 = 1$ a vtedy súčet $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ je $10010 + 110 = 10120$.

Ak by $A + D$ bolo väčšie ako 10, tak znova najmenšia hodnota $B + C$ je 1, no súčet bude určite väčší ako súčty v predošlom prípade.

Spomedzi všetkých prípadov najmenší päťciferný súčet, aký sme našli, je 10109. Overme ešte, či naozaj vieme nájsť $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ s týmto súčtom. Vieme napríklad takto: $8641 + 1468 = 10109$. Najmenší päťciferný súčet $\mathcal{M}$ a $\mathcal{I}$ je 10109.

Komentár

Najčastejšou chybou v riešeniach bolo nedostatočné zdôvodnenie, prečo ide o najväčšie či najmenšie číslo. Buď zdôvodnenie chýbalo úplne, alebo bolo vágne. Napríklad: „musí byť najväčšie, lebo som ho celý čas tvoril tak, aby bolo najväčšie“. Ak už sa rozhodneme takto postupovať, je nutné dokázať, že táto naša stratégia musela viesť k maximálnemu číslu. Niektorí taktiež zabudli, že pri sčítaní sa môže prechádzať cez desiatky.

5 opravovali **Mimi Hanus** a **Paťo Paľovčík**

najkrajšie riešenia: Barbora Baltovičová a Martin Šmilňák

36 riešení

Zadanie

Pozdĺž kružnice rulety sú napísané v nejakom poradí všetky prirodzené čísla od 1 do 2020 (každé práve raz) tak, že sa pri pohybe po kružnici rulety v smere hodinových ručičiek čísla striedavo zväčšujú a zmenšujú (pre ruletu s číslami od 1 do 4 by mohli byť čísla napísané napríklad v poradí 1, 3, 2, 4). Dokážte, že rozdiel niektorých dvoch po sebe idúcich čísel je deliteľný 2.

Riešenie

Predpokladajme, že rozdiel každých dvoch susedných čísel je nepárny (nedeliteľný dvomi). Keďže rozdiel dvoch nepárnych čísel je párny a rozdiel dvoch párnych čísel takisto, vyplýva z toho, že čísla pozdĺž kružnice sú striedavo párne a nepárne.
Podľa zadania sú čísla striedavo väčšie než susedia a menšie než susedia. Preto buď každé nepárne číslo je väčšie ako obaja jeho susedia (a každé párne je menšie ako jeho susedia), alebo každé párne číslo ako obaja jeho susedia. V prvom prípade nastane problém s umiestnením čísla 1, pretože medzi číslami na rulete nemáme dve párne čísla menšie než 1 (nemáme ani jedno). V druhom prípade podobne nebudeme vedieť umiestniť číslo 2. To všetko znamená, že náš predpoklad je nepravdivý a nutne existujú dve susedné čísla s párnym rozdielom.
Na záver môžeme ešte doplniť pozorovanie, že sme nevyužili pri riešení číslo 2020 (napríklad, že samo je párne), takže ani pre iné najvyššie číslo na rulete sa tam všetky čísla rozmiestniť nedajú.

Komentár

Väčšina z vás, ktorí ste túto úlohu odovzdali, si s ňou poradila veľmi dobre a teší nás veľký počet deväťbodových riešení. Najčastejšou chybou bolo, že niektorí skúsili len jednu možnosť zoradenia čísel, v ktorom ich takto zoradiť nie je možné. To však v úlohe, kde treba dokázať, že ich nebudeme môcť usporiadať nikdy, nestačí. Je potrebné to ukázať všeobecne, nielen pre jeden konkrétny prípad.

6 opravovali **Martin Masrna** a **Matúš Masrna**

najkrajšie riešenia: Barbora Baltovičová a Lucka Chladná

24 riešení

Zadanie

Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí, že súčin prvých n kladných celých čísel je deliteľný súčtom prvých n kladných celých čísel práve vtedy, keď číslo $n+1$

nie je nepárne prvočíslo. (To znamená dokázať dve veci. Ak je súčin deliteľný súčtom, tak $n+1$ nie je nepárne prvočíslo a, ak $n+1$ nie je nepárne prvočíslo, tak súčin je deliteľný súčtom).

Riešenie

Začneme tým, že si súčet aj súčin prvých n čísel zapíšeme jednoduchšie. Súčet prvých n celých kladných čísel je podľa vzorca rovný $n(n+1)/2$. (Tento vzorec si môžeme odvodiť nasledovne: K jednotke pričítame n, k dvojke $n-1$, k trojke $n-2$ a tak ďalej, až k n pričítame opäť jednotku – takto máme n súčtami zapísané číslo $n+1$. Keď sa však pozrieme späť na tieto súčty, môžeme si všimnúť, že sme dvakrát sčítali prvých n čísel, a teda $n \cdot (n+1)$ ešte musíme vydeliť dvoma.) Súčin prvých n kladných celých čísel si vieme zapísať ako $n!$.
Podiel súčinu a súčtu si vieme zapísať ako

$$\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2 \cdot n!}{n(n+1)} = \frac{2 \cdot (n-1)!}{n+1}.$$

Poďme si najprv dokázať, že ak je súčin deliteľný súčtom, tak $n+1$ nie je nepárne prvočíslo. Toto musí byť celé číslo, tým pádom $n+1$ musí deliť $2 \cdot (n-1)!$.
Predstavme si, že by $n+1$ bolo nepárne prvočíslo. $(n-1)!$ je súčin čísel od 1 po $n-1$, čo znamená, že neobsahuje číslo $n+1$. A keby $n+1$ bolo prvočíslo, tak tým pádom by určite neobsahoval ani žiaden jeho deliteľ. $n+1$ by nemohlo byť ani 2, pretože to má byť nepárne číslo. To by $n+1$ nedelilo ani 2, takže by s istotou nedelilo ani celý výraz $2 \cdot (n-1)!$. Tým sme dokázali, že platí, že ak je súčin deliteľný súčtom, tak číslo $n+1$ nemôže byť nepárne prvočíslo.
Teraz sa pozrime na druhú časť dôkazu. Musíme dokázať, že vždy, keď $n+1$ nie je nepárne prvočíslo, tak je súčin deliteľný súčtom.
Najprv vyriešme prípad, keď $n+1$ je párne prvočíslo, čiže je rovné dvom. Vtedy je n rovné jednej a súčin aj súčet sú tiež rovné jednej. V tomto prípade je naozaj súčin deliteľný súčtom.
Teraz vyriešme prípad, keď $n+1$ je zložené číslo. Zložené číslo vieme zapísať ako súčin dvoch čísel, pričom obe tieto čísla sú menšie ako dané zložené číslo. Máme dva prípady. Buď je zložené číslo druhou mocninou prvočísla, v tom prípade tieto čísla musia byť rovnaké a rovné tomu prvočíslu, alebo zložené číslo nie je druhou mocninou prvočísla, v tom prípade tieto čísla vieme vybrať tak, aby boli rôzne.
Najprv sa pozrime na ten prípad, kde tieto čísla vieme vybrať tak, aby boli rôzne. Obe tieto čísla sú menšie ako $n+1$, a keďže v súčine $(n-1)!$ sa nachádzajú všetky čísla menšie ako $n+1$ okrem čísla n, tak jediná možnosť, kedy by sa obe tieto čísla nenachádzali v tomto súčine, je, keby aspoň jedno z nich bolo rovné n. Jediný prípad, keď je číslo deliteľné číslom o jedna menším, je, keď to sú čísla 2 a 1. Teda buď je n rovné jednej, čo sme už rozobrali vyššie, alebo sú oba vybrané delitele zahrnuté v súčine $(n-1)!$, takže určite $n+1$ delí $2 \cdot (n-1)!$.

Čo však, ak je dané zložené číslo druhou mocninou prvočísla ($n+1=p^2$)? Číslo p sa určite nachádza v súčine $(n-1)!$ (nemôže byť $p=n$, pretože jediná možnosť, keď n delí $n+1$, je, keď $n=1$, čo nie je prvočíslo).
Ak by sa v $(n-1)!$ nachádzal ešte aspoň jeden násobok p, bol by celý súčin určite deliteľný $n+1$. Najmenší ďalší násobok je dvojnásobok. Takže jediný zlý prípad je, keď dvojnásobok nášho prvočísla je väčší ako $n-1$. A teda, ak

$$\begin{aligned}2\cdot p &> n-1,\\ 2\cdot p &> (n+1)-2,\\ 2\cdot p &> p^2-2,\\ 2 &> p-\frac{2}{p}.\end{aligned}$$

To platí, iba pokiaľ $p=2$ (pre $p\geq 3$ je $\frac{2}{p}\leq 1$, a teda $p-\frac{2}{p}\geq(p-1)\geq 2$). Tento prípad môžeme ošetriť osobitne. $n+1=2^2=4$, takže $n=3$. Vtedy $1+2+3=6$ a $1\cdot 2\cdot 3=6$, čiže súčin je naozaj deliteľný súčtom. Vo všetkých ostatných prípadoch sa v $(n-1)!$ nachádza aj dvojnásobok nášho prvočísla.
Tým sme postupne ukázali, že vo všetkých prípadoch, keď $n+1$ nie je nepárne číslo, je súčin deliteľný súčtom. Takže máme dokázané, že súčin prvých n kladných celých čísel je deliteľný ich súčtom práve vtedy, keď číslo $n+1$ nie je nepárne prvočíslo.

Komentár

Úloha nebola najjednoduchšia, o čom svedčí aj nižší počet riešení. Pri podobných úlohách netreba zabúdať na to, že dokázať musíte oba smery tvrdenia. To však ale väčšina z vás zvládla. Naopak, často ste zopár bodov stratili za to, že ste zabudli rozobrať jeden špecifický prípad. Preto určite nie je na škodu po napísaní riešenie ešte raz skontrolovať a uistiť sa, či ste zohľadnili všetky možnosti.

Autori vzorových riešení: Viktória Brezinová, Jakub Genči, Martin Masrna, Martin Mihálik, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Žaneta Semanišinová, Martin Števko

Zadania 2. série úloh letného semestra

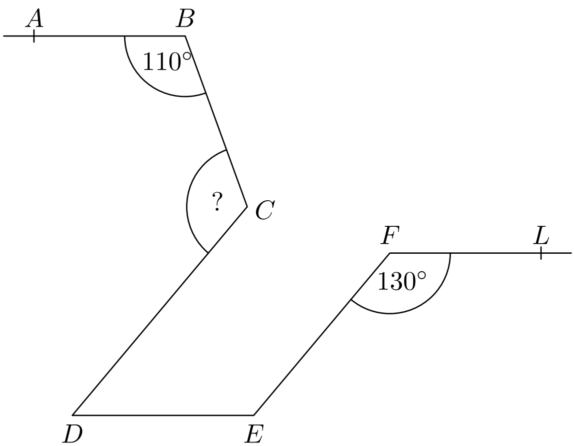
Riešenia pošlite najnekôr do **4. mája 2020**

Úloha 1

Mihál nazýva kladné celé číslo mimoňským obľúbeným číslom, ak sa toto číslo po vynásobení svojím ciferným súčtom zväčší 10-krát. Mihál hľadal mimoňské obľúbené čísla a keď ich niekoľko našiel, všetky ich medzi sebou vynásobil a vyšlo mu 532. V spánku však zabudol, ktoré čísla našiel. Ktoré čísla to boli, ak viete, že ich bolo viac ako jedno?

Úloha 2

Body A, B, C, D, E, F, L sú ako na obrázku. Veľkosť uhla ABC je 110 stupňov a veľkosť uhla EFL je 130 stupňov. Priamka AB je rovnobežná s priamkami FL a DE a zároveň je priamka CD rovnobežná s priamkou FE. Aká je veľkosť uhla BCD?



Úloha 3

Na stole sa nachádza 20 pokrových žetónov. Špenát Šrac a Chlieb Cézar hrajú hru, v ktorej sa striedajú v ťahoch a Šrac začína. Jeden ťah je odhodenie nejakého počtu žetónov. Odhodiť môžu toľko žetónov, koľko si vyberú, ale stále musia odhodiť aspoň jeden a nikdy nemôžu odhodiť naraz viac ako polovicu žetónov, ktoré budú zostávať na stole. Prehráva jedlo, ktoré už nevie spraviť korektný ťah. Je možné, aby jedno jedlo donútilo to druhé stále prehrať? Ak áno, ako?

Úloha 4

Rúčka mala tvar rovnostranného trojuholníka ABC*, kde na strane* BC *leží bod* F*. Obsah trojuholníka* ABF *je trikrát väčší ako obsah trojuholníka* ACF *a rozdiel obvodov týchto dvoch trojuholníkov je* 5*. Určte dĺžku strany trojuholníka* ABC*.*

Úloha 5

Na obvode hypnotického kruhu je vyznačených šesťdesiat bodov, z ktorých tridsať je zafarbených načerveno, dvadsať je zafarbených namodro a desať je zafarbených nazeleno. Tieto body rozdeľujú kružnicu na šesťdesiat oblúkov. Každému z týchto oblúkov je pridelené číslo podľa farieb jeho koncových bodov: oblúku medzi červeným a zeleným bodmi je priradené číslo 1*, oblúku medzi červeným a modrým bodmi je pridelené číslo* 2 *a oblúku medzi modrým a zeleným bodmi je priradené číslo* 3*. Oblúk medzi dvoma bodmi rovnakej farby je označený číslom* 0*. Aký je najväčší možný súčet všetkých čísel priradených oblúkom?*

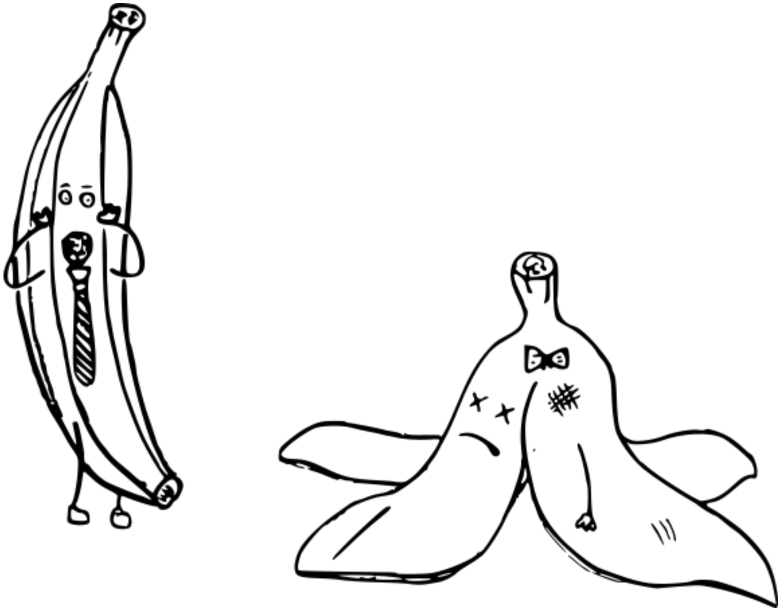
Úloha 6

Strelec cvičil streľbu na pizzu. V strede pizze bolo koliesko klobásy a zvyšok pizze bol pokrytý syrom. Strelec vystrelil dvadsaťkrát. Keď sa trafil do klobásy, získal 30 *bodov, keď sa trafil do časti, kde je syr, získal* 18 *bodov, a ak trafil okraj pizze, získal* 6 *bodov. Mohlo sa stať aj to, že sa do pizze ani netrafil, a potom nezískal žiaden bod. Na svojom celkovom skóre si všimol, že jeho priemerný bodový zisk za trafenie sa do pizze je* 17 *bodov (strely mimo pizze do priemeru nepočítal). Koľko najviac mohol streliť bodov?*

Poradie po 1. sérii letného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1.	Lucia Chladná	Z8	GAMČABA	9	9	8	9	9	9	0	**54**
2. - 3.	Samuel Osuský	Z9	ZDrJDMA	9	9	7	9	9	9	0	**52**
	Barbora Baltovičová	Z9	GAlejKE	9	9	8	8	9	9	0	**52**
4. - 5.	Milan Jozef Pokorný	Z7	GJHNHTT	9	7	7	9	9	-	0	**50**
	Branislav Ječim	Z9	ZOKožSN	9	9	8	8	9	7	0	**50**
6. - 10.	Veronika Vodičková	Z8	GAlejKE	9	7	8	9	9	-	0	**49**
	Martin Šmilňák	Z9	GAlejKE	9	8	7	9	9	7	0	**49**
	Eva Krajčiová	Z7	GAlejKE	9	9	9	4	9	-	0	**49**
	Ondrej Králik	Z8	GAlejKE	9	9	7	6	9	8	0	**49**
	Ivana Varsányiová	Z9	GBilíBA	9	9	7	9	9	6	0	**49**
11.	Richard Vodička	Z8	GAlejKE	9	7	8	-	9	7	0	**47**
12.	Artur Pankuch	Z7	GAlejKE	9	6	7	6	9	-	0	**46**
13. - 15.	Natália Tkáčová	Z7	ZLevoSN	9	7	7	2	9	4	0	**45**
	Adela Horváthová	Z9	ZDnepKE	9	6	7	7	9	7	0	**45**
	Alžbeta Klimentová	Z9	ZLNovKE	9	4	7	9	9	7	0	**45**
16. - 17.	Henrietta Antožy	Z8	ZKro4KE	9	1	6	7	9	7	0	**44**
	Bianka Gurská	Z9	GAlejKE	9	4	7	8	9	7	0	**44**
18.	Kalista Semancová	Z8	ZSNP1HE	6	6	7	4	9	7	0	**41**
19. - 20.	Vladimír Slanina	Z8	ZKro4KE	9	5	8	8	-	5	0	**40**
	Lukáš Jacko	Z8	ZKro4KE	9	5	6	6	9	-	0	**40**
21. - 22.	Paulína Tkáčová	Z8	ZLevoSN	9	7	7	2	7	4	0	**38**
	Lea Gašparová	Z7	GABerSC	9	6	5	-	9	-	0	**38**
23. - 24.	Katarína Farbulová	Z8	GAlejKE	9	3	7	0	9	6	0	**37**
	Terézia Stanová	Z9	EGJAKKE	9	3	7	3	9	6	0	**37**
25.	Dávid Kepič	Z9	GAlejKE	9	2	7	9	9	0	0	**36**
26. - 27.	Tomáš Kubrický	Z8	ZKro4KE	9	6	9	9	1	-	0	**35**
	Eduard Fedorčuk	Z9	EGJAKKE	9	9	7	2	-	8	0	**35**
28.	Erik Jochman	Z9	GAlejKE	7	4	5	9	9	0	0	**34**
29.	Ľudmila Krupová	Z7	ZKro4KE	9	3	5	6	-	-	0	**32**
30. - 33.	Ondrej Tóth	Z6	GVaršZA	9	4	-	0	9	-	0	**31**
	Oskar Cacara	Z7	ZKro4KE	9	4	5	4	0	-	0	**31**
	Radovan Milián	Z7	ZKro4KE	9	2	7	4	0	-	0	**31**
	Matúš Libák	Z8	GAlejKE	6	5	8	3	6	0	0	**31**
34.	Ján Brajerčík	Z9	ZŠmerPO	6	3	7	0	9	5	0	**30**
35.	Martin Dudjak	Z8	SMládPP	6	5	8	9	0	0	0	**28**
36. - 37.	Jakub Čaník	Z7	GAlejKE	9	5	3	0	0	-	0	**26**
	Matej Válek	Z7	ZKro4KE	6	3	6	5	-	-	0	**26**
38. - 39.	Tomáš Hazucha	Z8	GMMH9LM	9	6	1	7	-	-	0	**23**
	Katarína Adamčová	Z7	ZPapiBJ	9	3	0	2	-	-	0	**23**
40.	Tomáš Daňo	Z7	ZDruzKE	9	-	0	4	-	-	0	**22**
41.	Matej Kundrík	Z9	ZKro4KE	9	5	7	-	-	-	0	**21**
42. - 43.	Marek Horváth	Z8	GKonšPO	8	4	6	-	0	-	0	**18**
	Dušan Ivan	Z7	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	0	**18**
44. - 46.	Ema Lola Škombárová	Z8	ZKro4KE	9	5	-	3	-	-	0	**17**
	Šimon Stano	Z7	EGJAKKE	-	3	7	-	-	-	0	**17**
	Šimon Borovský	Z8	ZCádrBA	6	6	1	4	0	-	0	**17**
47. - 48.	Tomáš Gaja	Z9	ZKro4KE	9	6	-	-	-	-	0	**15**
	Michal Kaško	Z8	ZKro4KE	4	3	4	4	-	-	0	**15**
49.	Viliam Karol Kubičár	Z8	ZOKožSN	6	1	7	-	-	-	0	**14**
50.	Vladimír Sklenár	Z9	GTVanSL	6	1	3	3	0	-	0	**13**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
51.	Dávid Györi	Z7	ZKro4KE	-	-	6	-	-	-	0	**12**
52.	Bogdana Studenková	Z7	ZKro4KE	4	0	1	2	-	-	0	**11**
53. - 54.	Filip Fetyko	Z8	ZKro4KE	5	1	0	2	-	-	0	**8**
	Natália Poliačiková	Z8	ZKro4KE	5	3	-	-	-	-	0	**8**
55.	Šimon Stripaj	Z7	ZKro4KE	0	2	0	0	-	-	0	**4**
56.	Matej Vojtaník	Z8	ZKro4KE	-	2	1	0	-	-	0	**3**
57.	Maximiliána Ferencová	Z8	ZOKožSN	-	1	-	-	-	-	0	**1**
58.	Richelle Andrássyová	Z7	ZKro4KE	-	0	-	0	-	-	0	**0**



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2020 • Letný semester 33. ročníka

Internet: `matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk