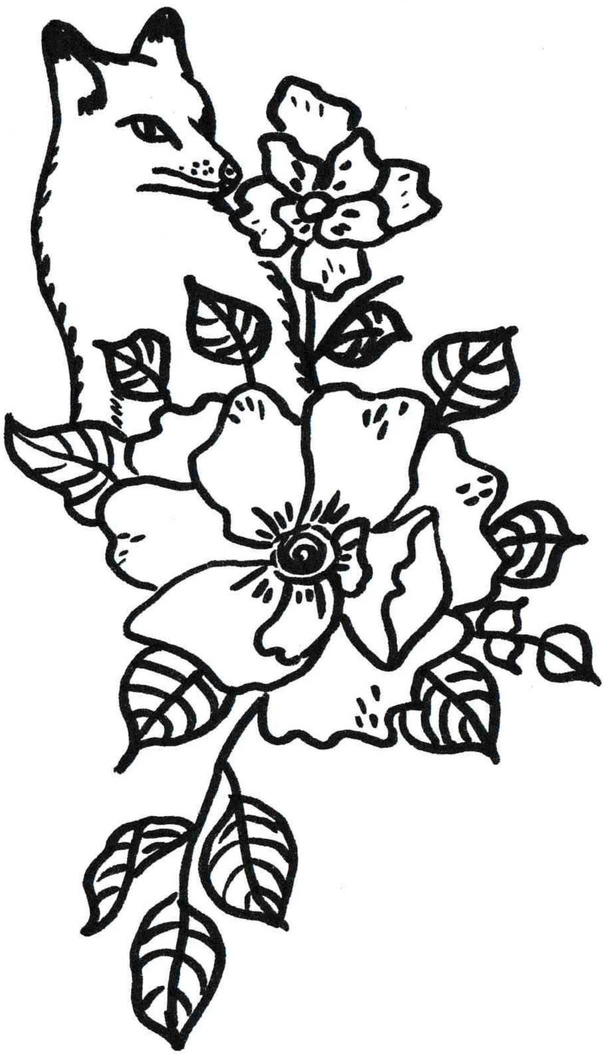
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 2 — Ročník 35 matik.strom.sk



Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie MATIKa, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

vedúci MATIKa

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1 opravovali: **Gabriela Genčiová** a **Bianka Gurská**

najkrajšie riešenie: Martina Osuská

58 riešení

Zadanie

Peťo pracuje v stavebninách a zvolal na pondelok pracovnú poradu. Prišlo na ňu desať jeho podriadených. Všetci z nich majú práve jeden obľúbený druh náradia. Keď sa ich Peťo opýtal, kto má rád kladivá, zdvihli ruky všetci desiati. Za skrutkovače zdvihla ruku len polovica z nich, no a napokon za vŕtačku hlasoval len jeden. Peťo si nespomenul, že je pondelok a tak zabudol, že niektorí jeho podriadení celý deň klamú (ostatní hovoria pravdu). Zistite, koľko ľudí obľubuje ktoré náradie.

Riešenie

Najprv je potrebné si uvedomiť, že zamestnanec, ktorý hovorí pravdu sa prihlási raz a zamestnanec, ktorý klame sa prihlási dvakrát. (Keďže máme 3 nástroje, pravdovravec sa prihlási len raz za svoj obľúbený nástroj. Klamár sa ale prihlási za oba nástroje, ktoré nemá rád.) Na kladivo sa prihlásili všetci zamestnanci a vieme, že nikto za neho nemohol hlasovať dvakrát. To znamená, že za neho hlasovali všetci pravdovravci aj klamári. Z toho vieme, že všetci pravdovravci majú obľúbený nástroj kladivo a ani jeden klamár nemá rád kladivo. Keďže pravdovravci svoj jeden hlas v hlasovaní už použili, vieme že všetci pravdovravci majú radi kladivo. Takisto vieme, že žiaden klamár nemá rád kladivo, nakoľko za neho hlasovali všetci, a teda klamári majú radi skrutkovače alebo vŕtačky. Zamestnanci, ktorí hlasovali za skrutkovače a vŕtačku sú teda klamári.

Za skrutkovače hlasovalo 5 klamárov. To znamená, že vŕtačku obľubuje 5 ľudí, pretože každý z nich nemá rád ani kladivo, ani skrutkovač, keďže týchto 5 klamárov klamalo, pri hlasovaní za kladivo aj skrutkovač. Za vŕtačku hlasoval 1 klamár, a teda ten obľubuje skrutkovač z rovnakého dôvodu ako pri vŕtačke.

Takto sme zistili, že 6 zamestnanci sú klamári. To znamená, že máme 10 - 6 = 4 zamestnancov, ktorí hovoria pravdu, a teda obľubujú kladivo.

Komentár

Túto úlohu sa podarilo mnohým z vás vyriešiť bez bodovej straty a všetko pekne vysvetliť. Body sme najčastejšie strhávali z toho dôvodu, že ste v riešení prehlásili, že zo zadania vyplýva, že sú štyria pravdovravci a šesť klamárov a nenapísali prečo. Vyskytli sa aj riešenia, kde ste skúšali možnosti. Takéto riešenie je správne iba v takom prípade, ak rozpíšete úplne všetky možnosti a ukážeme, že ďalšie nie sú. Taktiež je veľmi dôležité, aby ste pozorne čítali zadanie, pretože sa objavilo zopár prípadov, kde boli nástroje popletené. Preto je dobré, keď si riešenie skontrolujete. :)

2

opravovali: **Róbert Sabovčík** a **Martin „Iskra“ Dudjak** 50 riešení
najkrajšie riešenie: Evka Krajčiová a Hanka Sabová

Zadanie

Peťo mal vo svojej kancelárii plán novej súčiastky v tvare šesťuholníka. Na pláne bolo na každej hrane vyznačené číslo. Peťo do každého z vrcholov súčiastky vpísal súčet čísel na hranách, ktoré do daného vrcholu vchádzajú. Danovi prezradil, že do vrcholov zaradom napísal čísla: 65, 139, 94, 80, 139. Na šiestu hodnotu si však nevedel spomenúť. Aká bola hodnota v šiestom vrchole?

Riešenie

Označme si neznáme číslo pri šiestom vrchole x. Ďalej si hrany postupne v smere hodinových ručičiek nazvime písmenami od a po f tak, že a je medzi vrcholom, pri ktorom je napísané 65 a naším neznámym vrcholom x. Potom vieme, že $a + b = 65$, $b + c = 139$, $c + d = 94$, $d + e = 80$, $e + f = 139$, $f + a = x$.
Teraz si dajme tieto súčty to dvoch skupín tak, aby obe skupiny obsahovali každú hranu práve raz (a preto tvorili súčet $a+b+c+d+e+f$): $(a+b)+(c+d)+(e+f) = 65 + 94 + 139 = 298$, $(b + c) + (d + e) + (f + a) = 139 + 80 + x = 219 + x$.

Na základe tohto teda vieme, že súčty oboch skupín sa musia rovnať (lebo každá hrana je v každej skupine práve raz), a teda $298 = 219 + x$, z čoho jasne vidíme, že $x = 79$, čo je riešením úlohy.

Komentár

Mnohí z vás sa tejto úlohy zhostili veľmi dobre, čo nás ako obvykle veľmi teší. Najväčším problémom bolo, že niektorí z vás len dosadili na hrany náhodné čísla a potom ich upravovali tak, aby sedeli súčty vo vrcholoch, čím ste v tom poslednom dostali 79. To však nie je matematicky korektný postup, nakoľko musíte ukázať, že 79 bude riešením stále, nezávisle od toho, aké konkrétne čísla dosadíte.
Taktiež niekoľkí z vás si úlohu okresali len na dosadzovanie kladných čísel. V tomto konkrétnom prípade to nebol až taký veľký problém, no dávajte si pozor, ak v úlohe nie je napísané, že môžete používať len kladné čísla, tak potom si vy takúto podmienku určiť nesmiete.

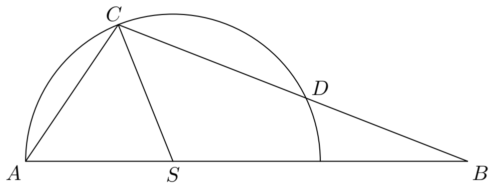
3 opravovali: **Martin Šmilňák** a **Jano Richnavský**

najkrajšie riešenie: Rišo Prikler

28 riešení

Zadanie

Peťo sa dostal k návrhu novej predajne. Jej pôdorys má tvar kružnice so stredom S a bodmi A, B, C a D ako na obrázku. Peťovi šéf povedal, že úsečky SC a BD sú rovnako dlhé. V akom pomere sú veľkosti uhlov ASC a SCD?



Riešenie

Do obrázka vyznačme úsečku SD. Úsečky SD a SC sú polomerom rovnakej kružnice, preto $|SD| = |SC|$. Zo zadania vieme, že $|SC| = |BD|$, čo znamená, že $|SD| = |SC| = |BD|$. Z toho vyplýva, že trojuholníky SBD a CDS sú rovnoramenné.

Veľkosť uhla SBD označme α. Uhol BSD je tiež α, lebo oba tieto uhly ležia pri základni rovnoramenného trojuholníka SBD. Potom $|\sphericalangle SDB| = 180° - 2\alpha$, pretože súčet veľkostí uhlov v trojuholníku je 180°.

Uhly SDB a SDC sú susedné, preto $|\sphericalangle SDB| + |\sphericalangle SDC| = 180°$, z toho vyplýva, že $|\sphericalangle SDC| = 2\alpha$. Uhly SDC a SCD ležia pri základni rovnoramenného trojuholníka CDS, čiže sú zhodné, a teda aj $|\sphericalangle SCD| = 2\alpha$. Potom $|\sphericalangle CSD| = 180° - 4\alpha$, pretože súčet veľkostí uhlov v trojuholníku je 180°.

Keď od priameho uhla ASB odrátame uhly CSD a BSD, dostaneme veľkosť uhla ASC:

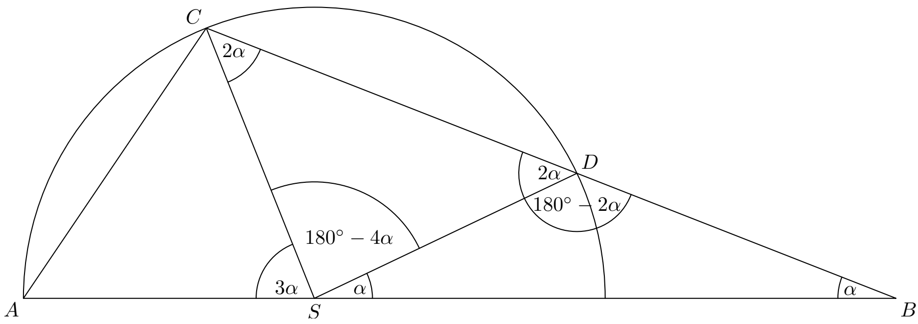
$$|\sphericalangle ASC| = 180° - |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle BSD|$$

$$|\sphericalangle ASC| = 180° - (180° - 4\alpha) - \alpha$$

$$|\sphericalangle ASC| = 180° - 180° + 4\alpha - \alpha$$

$$|\sphericalangle ASC| = 3\alpha$$

$|\sphericalangle ASC| = 3\alpha$ a $|\sphericalangle SCD| = 2\alpha$, preto sú veľkosti týchto uhlov v pomere 3:2.



Komentár

Veľmi nás potešil počet 9-bodových riešení. Body sme strhávali hlavne ak nám riešiteľ nezdôvodnil to, prečo sú niektoré trojuholníky rovnoramenné alebo prečo majú niektoré uhly takú veľkosť, akú majú. V riešení treba všetko poriadne vysvetliť, pretože nie všetko je zrejmé iba z obrázka. :)

4

opravovali: **Lujza Milotová** a **Sara Gašparová**
najkrajšie riešenie: Rišo Prikler

23 riešení

Zadanie

Peťo má francúzske kľúče očíslované číslami od 1 do 81. Chce si ich všetky uložiť do priehradiek na pracovnom stole. Priehradky sú usporiadané v mriežke 9×9 a do každej z nich sa vojde práve jeden kľúč. Ukážte, že akokoľvek Peťo vloží kľúče do priehradiek, vieme nájsť číslo k také, že súčin čísel kľúčov v k-tom riadku a v k-tom stĺpci je rôzny.

Riešenie

Súčin čísel v riadku sa bude rovnať súčinu čísel v stĺpci len vtedy, ak majú čísla v riadku dokopy rovnaký prvočíselný rozklad ako čísla v stĺpci. V prvočíselnom rozklade čísel 1 až 81 sa prvočísla 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 a 79 nachádzajú len raz. Prvočísla väčšie ako 40 totižto nemajú žiadne iné násobky menšie ako 81 okrem samých seba. Aby sa súčin k-tého riadku a k-tého stĺpca rovnal a zároveň sa tam nachádzalo prvočíslo väčšie ako 40, musí byť toto prvočíslo na prieniku stĺpca a riadku, čiže na diagonále.

Keďže prvočísel väčších ako 40 je 10 a políčok na diagonále len 9, musia byť v nejakom riadku (resp. stĺpci) aspoň dve takéto prvočísla. Potom sa ale v príslušnom stĺpci (resp. riadku) môže nachádzať len jedno z týchto prvočísel (to na diagonále), a teda čísla v tomto riadku a čísla v tomto stĺpci (resp. v stĺpci a riadku) nebudú mať rovnaký súčin. Z toho vyplýva, že vždy bude existovať nejaký k-ty riadok a k-ty stĺpec, ktorých súčin čísel je rôzny.

Komentár

Veľa z vás sa zvládlo s touto úlohou popasovať. Ak ste si uvedomili, že riešenie pôjde nájsť cez prvočíselný rozklad, nebolo ťažké prísť na dôkaz. Niektorí z vás si ale nevšimli, že iba prvočísla väčšie ako 40 sa v rozklade nachádzajú raz a počítali so všetkými. Potom riešenie nebolo správne a museli sme strhnúť body.
Najčastejšie sa stávalo, že aj keď ste mali správny výsledok, tak odôvodnenie nebolo dostatočné. Bez neho sme, bohužiaľ, nemohli dať plný počet bodov. Veľmi nás však potešilo pekné využitie Dirichletovho princípu vo väčšine riešení. Nakoniec ešte malá rada: ak sa v úlohe spomína rovnaký súčin, skúste sa pozrieť na prvočíselný rozklad. :)

5 opravovali: **Mimi Hanus** a **Mirka Horváthová**

najkrajšie riešenie: Oliver Seman

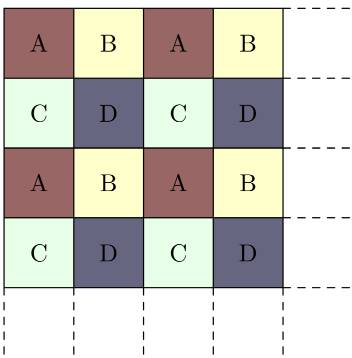
33 riešení

Zadanie

Peťo sa chce stretnúť s kolegom Danom na poschodí s kanceláriami. Kancelárie sú usporiadané v mriežke s rozmermi $m \times n$. Dano sa nachádza v opačnom rohu poschodia ako Peťo. Každú minútu sa Peťo a Dano presunú do miestnosti, ktorá je diagonálne od kancelárie, v ktorej boli predtým. Pre aké hodnoty m a n sa vedia Peťo a Dano stretnúť v rovnakej miestnosti? Ako to vedia urobiť? Pre ktoré to nie je možné a prečo?

Riešenie

V zadaní sa píše, že každú minútu sa Peťo aj Dano presunú. Predpokladajme, že aspoň jedna minúta niekedy prejde, a teda Peťo a Dano sa budú musieť mať kam presunúť, čiže mriežka musí mať aspoň dva stĺpce a aspoň dva riadky a úlohu treba riešiť iba pre prirodzené m a n väčšie než 1.
Pre začiatok si zafarbíme našu mriežku štyrmi farbami, a to tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci sa striedali dve farby ako na obrázku.



Povedzme, že Peťo začína vľavo hore na políčku farby A. Keďže sa pohybuje diagonálne, dostane sa iba na tmavé políčka – farieb A a D. Zároveň, keďže neexistujú dve susedné políčka jednej farby, v každom ťahu zmení farbu z A na D alebo naopak. To znamená, že vždy po párnom počte minút (napríklad na začiatku po 0 minútach) bude stáť na farbe A, po nepárnom počte minút na D.
Rozoberieme štyri prípady podľa toho, na akej farbe na začiatku stojí Dano.

A: Rovnako ako Peťo Dano zostane na tmavých políčkach. Po párnom počte minút bude vždy stáť na A, po nepárnom na D.

B: Keďže teraz Dano začína na svetlej farbe, zostane celý čas na svetlých políčkach. S Peťom sa nestretne, pretože ten chodí po tmavých.

C: Dano opäť začína a ostáva na svetlých políčkach a rovnako ako v predchádzajúcom prípade sa s Peťom nevie stretnúť.

D: Dano začína na tmavom políčku, takže na tmavých políčkach aj ostane. Striedať sa mu pod nohami budú farby A a D, ibaže tentoraz po 0 minútach, a teda aj po každom ďalšom párnom počte minút, bude stáť na D. Po nepárnom počte minút sa vždy bude nachádzať na A. To znamená, že po párnom počte minút Peťo bude na A a Dano bude na D, čiže budú nutne v rôznych miestnostiach. Po nepárnom počte minút Peťo bude na D a Dano na A, čiže opäť v rôznych miestnostiach. Takže ani v tomto prípade sa Peťo a Dano nestretnú.

V troch zo štyroch prípadov sa Peťo a Dano nestretnú. Vo štvrtom sa stretnúť vedia, ešte nám však zostáva dokázať, že je tomu naozaj vždy tak.
Nech Peťo celý čas iba vychádza zo svojho rohu do rohom susednej kancelárie farby D a vracia sa späť. Zatiaľ Dano chodí po tmavých políčkach a vždy sa presúva z políčka na susedné tmavé políčko (a mriežka je konečná), čiže sa zjavne vie dostať na ktorékoľvek tmavé políčko. Nech teda ide do ľavého horného roku, teda tam, kde začínal Peťo. Je to políčko farby A, takže Dano tam dôjde (že tam raz dôjde, sme si už rozmysleli) za párny počet minút. Peťo zatiaľ chodil po dvoch políčkach tam a nazad, takže momentálne po párnom počte minút je tam, kde začal, čo je v jeho rohu. To znamená, že Peťo a Dano sa nachádzajú spolu v Peťovej východiskovej kancelárii a stretli sa.
Povedzme, že mriežka má m stĺpcov a n riadkov. Ďalej očíslujme stĺpce zľava doprava, aby Peťo začínal v stĺpci 1 a Dano v stĺpci m, a riadky zhora nadol, aby Dano začínal v riadku n. Všimnime si, že farbu A má kancelária práve vtedy, keď je v nepárnom stĺpci aj v nepárnom riadku. Z toho vyplýva, že Dano sa vie stretnúť práve vtedy, keď začína v nepárnom stĺpci a zároveň v nepárnom riadku, čo je práve vtedy, keď m i n sú nepárne.

Iné riešenie
Povedzme, že mriežka má m stĺpcov a n riadkov, Peťo začína vľavo hore a Dano začína vpravo dole.
Očíslujme stĺpce zľava doprava, aby ľavý stĺpec bol prvý a Dano začínal v stĺpci m. Všimnime si, že pri každom pohybe sa človek posunie zo svojho stĺpca do susedného stĺpca. To znamená, že číslo stĺpca, v ktorom sa nachádza, sa zmení o 1, teda sa zmení z párneho na nepárne alebo z nepárneho na párne. Takto Peťo začína v prvom, teda nepárnom stĺpci, takže vždy po párnom počte minút (rovnako ako na začiatku po 0 minútach) bude v nepárnom stĺpci, po nepárnom počte minút bude v párnom stĺpci. Ak Dano začne v párnom stĺpci, bude naopak vždy po párnom počte minút v párnom stĺpci a po nepárnom počte minút v nepárnom. To znamená, že po každom počte minút bude v stĺpci s iným číslom ako Peťo, čiže v inom stĺpci, takže určite v inej kancelárii. Preto, ak sa Dano a Peťo majú stretnúť, musí Dano začínať v nepárnom stĺpci. Ako vieme, Dano začína v stĺpci m, teda m musí byť nepárne.
Obdobne očíslujeme riadky zhora nadol a dokážeme, že Dano musí začínať v nepárnom, a teda aj n musí byť nepárne.
To, že sa naozaj stretnú urobíme popísaním jedného konkrétneho postupu rovnako ako v prvom riešení vyššie.

Komentár
Na začiatok by bolo fajn spomenúť, že veľa z vás nespomenulo prípady, keď je jeden z rozmerov m alebo n rovný 1. Vtedy sa totiž ani jeden z kolegov pohybovať nevie, pretože nemá kam (samozrejme, pre 1×1 už sú v rovnakej kancelárii). Nebojte sa, za toto sme body nestrhli, keďže zo zadania sme si vedeli domyslieť, že sa pohybovať vedia, no pre budúcnosť je vhodné zvážiť aj takúto možnosť :).
Ďalej prípady, keď by sa Dano a Peťo pohybovali po rozdielnej farbe políčok pri šachovnicovom ofarbení, ste takmer všetci zvládli veľmi správne ukázať. No problém nastal, keď ste išli riešiť, kedy sa (ne)vedia stretnúť, ak obaja začínajú na trebárs tmavých políčkach. Veľa z vás nám vo svojom riešení nakreslilo jednu konkrétnu tabuľku pre každý prípad, z ktorej nám malo byť jasné, ako to je. Mali ste síce správny výsledok, no plné počty bodov sme nemohli udeliť, keďže vaše odôvodnenie nebolo dostatočné.
Rada na záver :): Takéto úlohy je však nutné riešiť všeobecne, nie len na pár konkrétnych prípadoch.

6

opravovali: **Paťo Paľovčík** a **Erik Novák**
najkrajšie riešenie: Michal Vodička

28 riešení

Zadanie

Peťovi a jeho kolegovi Danovi zvýšil nejaký voľný čas počas obednej pauzy. Na papier si napísali čísla od 1 do 100. Postupne sa striedajú v ukladaní znamienok $+$, $-$ a $\times$ do medzier medzi číslami. Peťo ide prvý a hrajú dovtedy, kým nie sú všetky medzery vyplnené. Pred každou hrou si vyžrebujú, kto vyhrá, keď je výsledný výraz na tabuli párny. Má niektorý z nich vyhrávajúcu stratégiu? Ak áno, akú? Ak nie, prečo?

Riešenie

Na začiatku si môžeme všimnúť, ako menia paritu jednotlivé znamienka medzi číslami. Ak dáme medzi dve čísla $\times$, tak jedno je vždy párne a druhé nepárne, a teda ich súčin je párny. Rovnako ostane párny, aj ak by s týmito dvomi číslami násobili akékoľvek iné, keďže na párny výsledok stačí, aby bolo medzi činiteľmi aspoň jedno párne číslo. $+$ a $-$ fungujú rovnako, a to tak, že ak sčítame, respektíve odčítame dve čísla, čo majú rovnakú paritu (obe párne alebo obe nepárne), tak výsledok je párny, a ak majú rozdielnu paritu (jedno párne a jedno nepárne), tak nepárny. Na zjednodušenie preto nemusíme vôbec používať $-$ a postačí nám $+$ a $\times$.
Medzi číslami od 1 do 100 je spolu 99 medzier, a keďže je to nepárny počet, tak Peťo bude mať prvý aj posledný ťah v hre. Začnime prípadom, keď vyhrá Peťo ak bude na konci výraz párny. Keďže násobenie má prednosť pred sčítaním, stačí ak dosiahne, že všetky sčítance (jednotlivé čísla a súčiny v rámci výrazu oddelené znamienkami $+$) budú párne.
Na začiatku musí dať $\times$ medzi 1 a 2, lebo inak by tam vedel dať Dano $+$, a tým by vytvoril nepárny sčítanec. 100 na konci je párne a $+$ pred ňou teda Peťovi nevadí. Pri zvyšných číslach je medzera pred, aj za číslom a Peťo musí reagovať na Danove ťahy. Potrebuje zabrániť tomu, aby niekde vznikol nepárny sčítanec, a to tak, že nedovolí Danovi dať $+$ pred, aj za nepárne číslo. Ak teda Dano dá $+$ pred nepárne číslo, ktoré ešte pred sebou znamienko nemá, tak Peťo umiestni $\times$ práve za to číslo a vznikne tak párny sčítanec. Podobne, ak dá Dano $+$ za nepárne číslo, ktoré ešte za sebou nemá znamienko, tak Peťo umiestni $\times$ pred to číslo a tiež vznikne párny sčítanec. Každé nepárne číslo (okrem 1, ktoré už okolo seba nemá miesto žiadne) má na začiatku dve miesta bez znamienka okolo neho a Dano vždy umiestňuje svoje znamienko na nejaké z nich. Musí tak urobiť preto, lebo vedľa každej medzery je nepárne číslo (nikde nie sú 2 párne čísla pri sebe), a taktiež žiadne 2 nepárne čísla nie sú pri sebe, teda nevie dať svoje znamienko k dvom nepárnym číslam naraz. Peťo zatiaľ dá $\times$ na to druhé miesto, a teda sa nemôže stať, že by Peťo nemal kam umiestniť $\times$, pretože by na druhej strane od čísla, ku ktorému dal svoje znamienko Dano, už nejaké znamienko bolo. Ak by Dano neumiestnil v svojom ťahu $+$, ale $\times$, tak to Peťovi nijak plány nepokazí a stále môže umiestniť $\times$ z druhej strany

nepárneho čísla, čím nevznikne nepárny sčítanec. Môže teda takto reagovať vždy, keďže má posledný ťah, a má tým pádom víťaznú stratégiu.
Ak vyhrá Peťo vtedy, ak je výraz nepárny, tak môže postupovať podobne. Jediná zmena je, že na začiatku dá + medzi čísla 1 a 2, čím vytvorí nepárny sčítanec. Ďalej už rovnakou stratégiou ako minule odpovedá na Danove ťahy a tým, že udrží všetky ostatné sčítance párne, bude celý výraz nepárny. Peťo má teda víťaznú stratégiu v oboch prípadoch.

Komentár

Mnohým z vás sa stalo, že ste nepochopili zadanie a mysleli si, že znamienka nemôžu dávať kam chcú, ale ich ukladajú do medzier v poradí zľava doprava. Toto dokonca bolo vysvetlené aj v diskusii k úlohe. Odporúčame vám teda čítať diskusiu k príkladom, keďže vám vie vždy vyjasniť alebo prezradiť niečo, čo ste doposiaľ nevedeli alebo nechápali.
Druhou chybou, ktorú spravili niekoľkí z vás bolo, že ste nedbali na štandardné poradie operácií (najprv násobenie, potom sčítanie a odčítanie) a tým pádom prišli jednoducho k záveru, že na konci mi stačí umiestniť plus alebo krát podľa toho, aké parity majú výrazy naľavo a napravo od posledného prázdneho miesta. Toto však je veľmi ľahko vyvrátiteľné triviálnym kontrapríkladom, napr. v zjednodušenom rade šiestich čísel pred posledným ťahom $1+2+3\times4\_5\times6$ je naľavo od prázdneho miesta nepárny výraz a napravo párny, no ak do prázdneho miesta dáme $\times$ vznikne výraz s nepárnou hodnotou.

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **29. novembra 2021**

Úloha 1

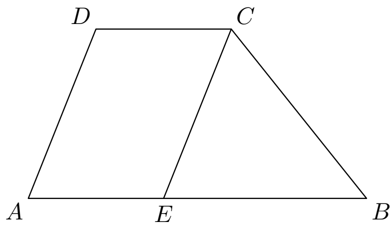
Peťo dostal od šéfa úlohu objednať štyri vrtáky. Peťov šéf si však nepamätal všetky detaily, tak Peťovi o ich veľkostiach povedal len toľko:

- *„Ich súčet je 40.“*
- *„Sú medzi nimi práve dve prvočísla.“*
- *„Najväčšia z veľkostí je druhá mocnina prirodzeného čísla (číslo vynásobené samo so sebou).“*
- *„Žiadne dve veľkosti nie sú súdeliteľné (nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1).“*

Aké veľkosti vrtákov má Peťo objednať?

Úloha 2

Peťo bol privolaný ako pomocník na stavbu. Stavebný pozemok má tvar lichobežníka $ABCD$, ktorý je rozdelený úsečkou CE na trojuholník a rovnobežník. Bod F je stredom úsečky CE. Priamka DF prechádza stredom úsečky BE. Obsah trojuholníka CDE je $6\,\mathrm{m}^2$. Pomôžte Peťovi určiť obsah pozemku.



Úloha 3

Peťo sa s kolegom Danom počas nudných dní hrajú hru. Na začiatku majú dve kôpky, na ktorých je 42 a 47 skrutiek. V jednom ťahu musí hráč zobrať jednu kôpku, zahodiť ju, a tú druhú rozdeliť na dve neprázdne kôpky. Ak niekto nevie urobiť žiaden ťah, prehral. Ako prvý je na ťahu Peťo. Kto má víťaznú stratégiu a aká je?

Úloha 4

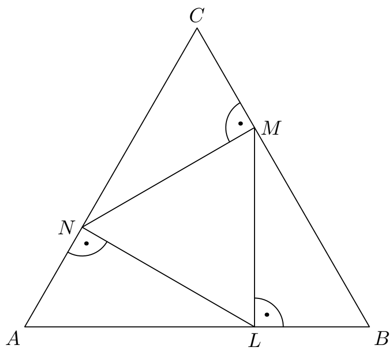
Na firemnom večierku počítač generoval čísla víťazov tomboly. Postupne generoval rôzne prvočísla, až kým nevygeneroval také, ktoré sa líšilo od nejakého už vygenerovaného o násobok 30. Koľko najviac čísel mohol vygenerovať?

Úloha 5

Stavbári majú v chladničke na začiatku dňa tri typy obedov: sviečková, klobása a rezeň. Vždy, keď robotník otvorí chladničku, vyberie si z nej 2 obedy rôznych typov a vloží do nej obed tretieho typu. Robotníci chodia do chladničky kým môžu opakovať uvedený postup. Ak na konci dňa zvýši v chladničke iba jeden obed, donesie ho Dano Peťovi. Ukážte, že ak by sa Peťo ráno pozrel do chladničky, vedel by zistiť či mu Dano donesie obed a ak áno, aký typ obeda to bude, bez ohľadu na voľby jednotlivých robotníkov.

Úloha 6

Peťo nebol v poslednej dobe veľmi pracovne vyťažený, preto sa jeho šéf rozhodol dať mu za úlohu navrhnúť nové logo stavebnín. Peťov návrh mal tvar rovnostranného trojuholníka ABC *s bodmi* L, M, N *ležiacimi postupne na stranách* AB, CB, CA, *tak, že* $ML \perp AB$, $MN \perp CB$ *a* $LN \perp CA$. *Peťo chce, aby bol trojuholník* LMN *farebný, no nemôže si ale dovoliť minúť priveľa farby. Pomôžte Peťovi zistiť aká časť obsahu loga bude farebná.*



Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 4.	Alenka Bálintová	Z8	CZRZaZA	9	9	9	9	8	9	54
	Martina Osuská	Z8	ZDrJDMA	9	9	9	9	9	8	54
	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Michal Vodička	Z8	GAlejKE	9	9	7	9	9	9	54
5. - 6.	Richard Prikler	Z8	GJARMPO	9	9	9	9	7	-	50
	Janka Urbánová	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	1	7	50
7. - 9.	Natália Tkáčová	Z9	ZLevoSN	9	9	9	8	7	6	48
	Nina Hudáková	Z7	GAlejKE	9	9	9	9	3	3	48
	Eva Krajčiová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	3	9	48
10.	Marie Kasalová	Z7	GTruhla	9	9	8	9	-	-	44
11.	Ľuboš Šesták	Z7	ZVývoBA	9	8	8	-	5	1	40
12.	Barbora Brindžáková	Z7	ZKro4KE	9	9	8	0	1	3	39
13.	Magdaléna Škriabová	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	9	2	38
14.	Ondrej Tóth	Z8	GVaršZA	5	5	9	4	3	9	36
15.	Daniel Takáč	Z7	GAlejKE	9	5	9	1	2	0	35
16. - 18.	Jakub Čaník	Z9	GAlejKE	9	8	-	9	3	1	30
	Tomáš Boledovič	Z9	Narnia	9	8	9	-	4	-	30
	Tomáš Sukeľ	Z9	ZJŠveHE	6	9	9	-	6	-	30
19.	Hana Sabová	Z8	ZŠvermMI	9	9	8	2	-	-	28
20. - 21.	Sarah Klopstock	Z8	ŠpMNDaG	9	4	9	3	1	1	27
	Hana Hricová	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	27
22.	Jakub Stramba	Z7	ZKro4KE	9	7	-	-	1	-	26
23.	Radovan Milián	Z9	ZKro4KE	9	5	8	-	3	-	25
24.	Adam Ilčík	Z9	ZKro4KE	9	9	-	-	4	2	24
25.	Barbora Menšíková	Z7	ZKro4KE	-	5	9	-	-	-	23
26. - 28.	Michal Válek	Z7	ZKro4KE	9	4	-	-	-	-	22
	Anna Birková	Z7	ZKro4KE	9	4	-	-	-	-	22
	Gorazd Korečko	Z7	ZKro4KE	9	4	-	-	-	-	22
29. - 30.	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	9	9	-	-	3	-	21
	Miriam Varechová	Z7	ZKro4KE	9	-	-	-	3	-	21
31. - 32.	Ľudmila Krupová	Z9	ZKro4KE	9	7	-	-	1	3	20
	František Krč	Z7	ZKro4KE	8	4	-	-	-	-	20
33.	Šimon Škombár	Z8	ZKro4KE	9	6	1	-	3	-	19
34. - 35.	Boris Köröš	Z8	GAlejKE	9	9	-	-	-	-	18
	René Ivan	Z7	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	18
36.	Severín Karabinoš	Z8	GAlejKE	9	8	-	-	-	-	17
37.	Matej Válek	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	6	1	16
38. - 39.	Martin Azari	Z7	ZKro4KE	6	3	-	-	-	-	15
	Nina Anna Betáková	Z9	ZJŠveHE	9	4	1	0	0	1	15
40. - 44.	Bogdana Studenkova	Z9	ZKro4KE	9	5	-	-	-	-	14
	Marko Strompf	Z7	ZKro4KE	0	-	7	-	-	-	14
	Janka Ľochová	Z8	GOpatKE	0	9	1	0	3	1	14
	Michal Šarkan	Z8	ZMRŠHLC	9	5	-	-	-	-	14
	Martin Vrba	Z8	ZKro4KE	9	4	-	-	-	1	14
45. - 46.	Ján Štiavnický	Z8	ZKro4KE	9	3	0	0	0	1	13
	Simona Krošláková	Z9	ZŠ s MŠ Gogoľova	0	5	3	0	3	2	13

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
47. - 49.	Samuel Györi	Z8	ZKro4KE	9	-	2	1	-	-	12
	Šarlota Šustová	Z7	ZKro4KE	2	5	-	-	-	-	12
	Lukáš Dankanin	Z7	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	12
50. - 52.	Richard Orosz	Z7	ZKro4KE	-	5	-	-	-	1	11
	Juraj Horňák	Z8	ZKro4KE	9	2	-	-	-	-	11
	Dorián Lovič	Z8	ZKro4KE	7	4	-	-	-	-	11
53.	Samuel Šimurda	Z7	ZKro4KE	0	5	-	-	-	-	10
54. - 55.	Dušan Ivan	Z9	ZKro4KE	-	9	-	-	-	-	9
	Šimon Varga	Z7	ZKro4KE	1	-	-	-	4	-	9
56. - 58.	Dávid Györi	Z9	ZKro4KE	7	-	-	0	-	-	7
	Šimon Šima	Z8	ZKro4KE	7	-	-	-	-	0	7
	Gregor Pribičko	Z7	ZKro4KE	3	-	-	-	-	1	7
59.	Adam Kožuch	Z9	ZŠ Gbelce	0	5	-	0	1	0	6
60.	Simon Jakub	Z8	ZKro4KE	5	-	-	0	-	-	5
61.	Lukáš Hanes	Z9	ZKro4KE	-	-	2	-	-	-	2
62.	Šimon Stripaj	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	0	1	1
63.	Bronislava Hájasová	Z8	ZŠ Gbelce	0	0	-	-	-	-	0

Názov:	*MATIK* – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • November 2021 • Zimný semester 35. ročníka
Web:	`matik.strom.sk`
E-mail:	`matik@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.