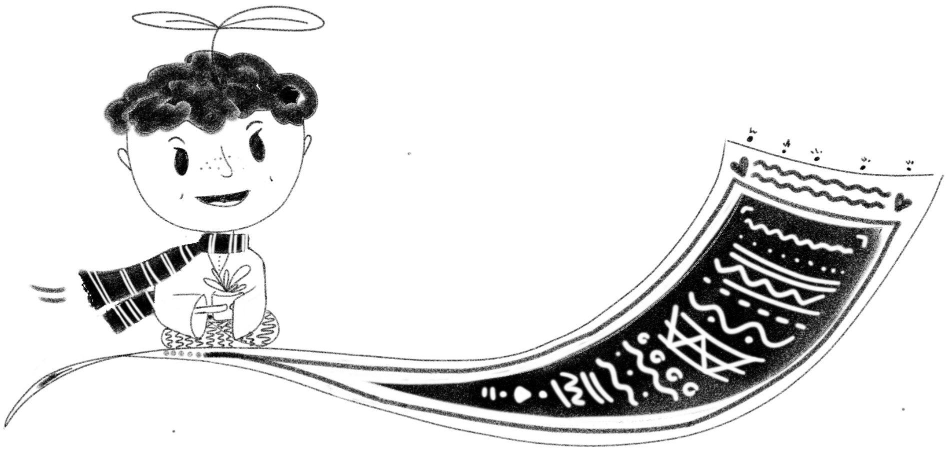
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 3 — Ročník 38 matik.strom.sk



Ahoj!

Je tu ďalší časopis *MATIK*a, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia, kde budú obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

vedúci *MATIK*a

Ako bude

Vianočný Maxiklub

Tradične v čase Vianoc sa bude konať Vianočný Maxiklub, čo je vianočné stretnutie stromákov! Vítaní sú všetci, účastníci, vedúci, bývalí vedúci a každý, kto má rád STROM a stromákov. Stretneme sa 28. 12. o 14:00 v miestnosti P19 na PF UPJŠ na Jesennej 5 v Košiciach, ktorá nám bude k dispozícii do 18:00. Okrem seba nezabudnite doniesť aj vianočnú náladu a nejaké fajné jedlo, určite sa zíde.

Vzorové riešenia 2. série úloh zimného semestra

1

opravovali: **Nina Anna Betáková** a **Mišo Vodička**
najkrajšie riešenie: Jakub Katrák

39 riešení

Zadanie

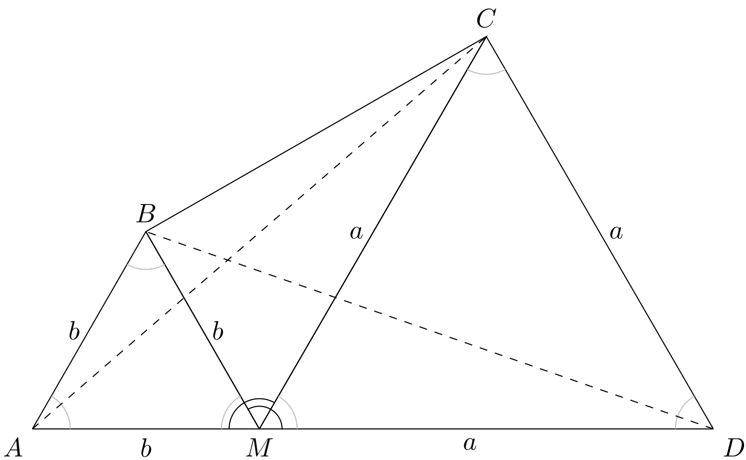
Na gobelíne tvaru štvoruholníka $ABCD$ existuje na strane AD bod M taký, že trojuholníkové výšivky MCD a MAB sú rovnostranné. Dokážte, že uhlopriečky tohto gobelínu sú rovnako dlhé. Úlohu neriešte meraním.

Riešenie

Keďže trojuholník MCD je rovnostranný, tak jeho strany DM a CM sú rovnako dlhé. Túto dĺžku si označme a. Pri rovnostrannom trojuholníku MAB platí to isté, teda strany MA a MB sú rovnako dlhé. Túto dĺžku si označme b.

V rovnostrannom trojuholníku majú všetky vnútorné uhly veľkosť $60°$, takže uhly DMC a BMA majú veľkosť $60°$. Teraz sa pozrime na uhol DMB. Skladá sa z uhlov DMC a CMB. To znamená, že jeho veľkosť je súčtom veľkostí týchto dvoch uhlov. To je $60° + |\sphericalangle CMB|$. Rovnako uhol CMA sa skladá z uhlov BMA a CMB, teda jeho veľkosť je $60° + |\sphericalangle CMB|$. Môžeme si všimnúť, že rovnakú hodnotu sme dostali pri uhle DMB, čiže uhly DMB a CMA sú rovnaké.

Pozrime sa na trojuholníky DMB a CMA. Sú zhodné podľa vety SUS, lebo oba majú strany dĺžok a aj b a uhly zovreté týmito stranami sú DMB a CMA a tie sme dokázali, že sú rovnaké. Takže aj zvyšné strany týchto trojuholníkov majú rovnakú veľkosť, teda $|BD| = |CA|$, čo sú aj uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$.



Komentár

Teší nás, že väčšina z vás zvládla úlohu vyriešiť správne, naviac rôznymi spôsobmi riešenia, teda získala 9 bodov. Ostatní väčšinou nesprávne pochopili zadanie. Ak sa v úlohe spomínajú rovnostranné trojuholníky, neznamená to, že tieto trojuholníky sú nutne zhodné. Takáto chyba môže byť spôsobená tým, že sa ťažko predstavuje, ako tento štvoruholník môže vyzerať. Preto je užitočné si obrázok dobre nakresliť, aby sa takéto chyby neopakovali.

2

opravovali: **Megy Škriabová** a **Ľubo Vargovčík**
najkrajšie riešenia: Elena Mikušová a Hana Ihnátová

29 riešení

Zadanie

Na stene sú napísané čísla $1, 2, 3, \ldots, 673$. Aradin a Bafar striedavo zmazávajú čísla, až kým na tabuli neostanú len 2 čísla. Aradin začína. Ak je súčet posledných dvoch čísel deliteľný 8, vyhráva Aradin, ak nie, vyhráva Bafar. Pre ktorého z hráčov existuje výherná stratégia? Výherná stratégia je postup, podľa ktorého hráč vyhrá bez ohľadu na ťahy súpera.

Riešenie

Zaujíma nás deliteľnosť súčtu poslednej dvojice osmičkou. Zvyšky po delení 8 môžu byť nasledovné: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0. Medzi číslami 1 až 673 máme z každého zvyšku 84 čísel ($673 : 8 = 84$, zv. 1) okrem zvyšku 1, tento zvyšok má 85 čísel ($84 + 1 = 85$). Aby súčet nejakej dvojice čísel bol deliteľný 8, súčet ich zvyškov musí byť deliteľný 8. Keďže čísel s jednotlivými zvyškami je rovnaký párny počet (až na jedno číslo so zv. 1, ktoré ostane samo), vieme ich podvojicovať, a to zv. 1 so zv. 7, 2 so 6, 3 s 5, 4 so 4, 0 s 0 (zvyšky 4 a 0 vieme podvojicovať samé so sebou, keďže ich počty sú párne). Ostalo nám jedno číslo so zvyškom 1 bez dvojice.

Keďže na stene máme 673 čísel a na konci ostanú dve, uskutoční sa $673 - 2 = 671$ ťahov. To znamená, že prvý hráč má o jeden ťah viac a tento ťah využije na zobratie jedného čísla so zvyškom 1. Tým zabezpečí, že ostanú už iba čísla, ktoré vždy budú vedieť vytvoriť dvojicu s iným číslom tak, aby táto dvojica mala súčet deliteľný 8. Následne Aradin vždy reaguje na Bafarov ťah tým, že zoberie dvojicu k číslu (resp. zvyšku), ktoré zobral Bafar. Po každej dvojici ťahov Aradin-Bafar bude o jednu dvojicu čísel so súčtom deliteľným 8 menej. Napokon ostane už iba jedna dvojica a tá bude deliteľná 8. Výhernú stratégiu má preto Aradin.

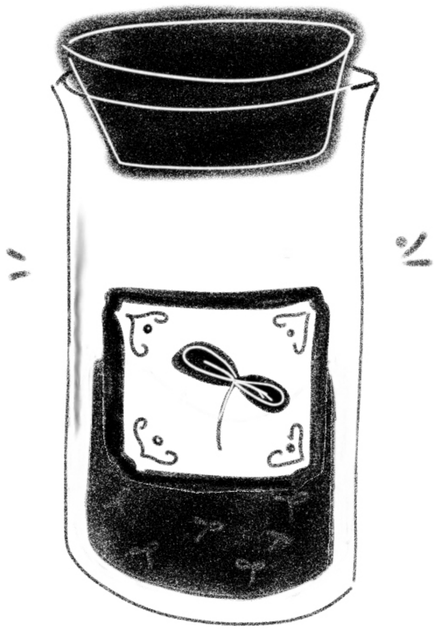
Iné riešenie

Najvyšší napísaný násobok 8 je $84 \cdot 8 = 672$. Teda všetky čísla menšie ako 672 vieme dať do párov tak, aby ich súčet bol 672, teda deliteľný 8. To vieme urobiť tak, že podvojicujeme čísla od 1 po 335 s číslami od 337 po 671 ($1+671$, $2+670$...). Ku 336 by sme potrebovali ako dvojicu opäť 336, avšak to nemáme, keďže každé číslo je napísané len raz. Ostanú nám čísla 336, 672 a 673, ktoré sú bez páru. Avšak $672 + 336 = 1008$ a $1008 : 8 = 126$, takže do dvojice vieme dať 672 a 336 tak, aby ich súčet bol deliteľný 8. Bez páru ostáva už len 673.

Aradinovi stačí na začiatok hry zobrať 673 a následne zobrať vždy číslo, ktoré je v dvojici s číslom, ktoré zobral Bafar. Tak na tabuli stále ostanú len dvojice, ktorých súčet je deliteľný 8. Takýmto spôsobom aj posledná dvojica na tabuli bude mať súčet deliteľný 8 a Aradin určite vyhrá.

Komentár

Teší nás, že sa medzi vašimi riešeniami objavili oba spôsoby. Avšak vo viacerých riešeniach chýbal dôkaz, že sa naozaj budú dať čísla podvojicovať, teda že napríklad čísel so zvyškom 2 je rovnako veľa ako čísel so zvyškom 6. Zároveň netreba zabúdať spomenúť, že čísel so zvyškom 4 alebo 0 je párny počet, čo je dôležité pre to, aby sa vedeli rozdeliť do dvojíc.



3 opravovali: **Viliam Geffert** a **Nina Hudáková**

najkrajšie riešenie: Dominik Feňovčík

39 riešení

Zadanie

Magická Anábia sa vyznačuje tým, že každý jej obyvateľ má priradené kladné celé číslo. Zároveň každý pozná len svoje číslo a nepozná číslo ostatných. Traja kamaráti Aradin, Tymiána a Džinus išli jedného dňa za vševedomým zrkadlom, ktoré im prezradilo, že súčet ich čísel je 100. Potom postupne povedali:

1. Tymiána: „Ja a Džinus nemáme rovnaké čísla.“
2. Aradin: „To som už vedel.“
3. Tymiána: „Tak teraz viem aj to, že všetci máme rôzne čísla.“
4. Džinus: „Tak ja už poznám číslo každého z nás.“

Aké čísla boli priradené jednotlivým kamarátom? Nájdite všetky riešenia.

Riešenie

Nech a označuje Aradinovo číslo, t označuje Tymiánino číslo a d označuje Džinusovo číslo.

Pozrime sa na prvý výrok. Tymiána tvrdí, že $t \neq d$. Jej číslo t preto musí mať nejakú vlastnosť, pomocou ktorej to vie jednoznačne prehlásiť. Zatiaľ však pozná iba svoje číslo a to, že súčet čísel všetkých kamarátov je 100. Musí teda platiť, že $t \geq 50$, lebo ak by Tymiána mala číslo menšie ako 50, tak by nevedela prehlásiť, že Džinus nemá rovnaké číslo, keďže jeho číslo zatiaľ nepozná. Čiže Aradin a Džinus musia mať čísla menšie ako 50, inak by nemohli mať súčet rovný 100.

V druhom výroku sa dozvedáme, že Aradin to už vedel. Jeho číslo musí mať rovnako nejakú vlastnosť, aby to vedel jednoznačne prehlásiť. Taktiež pozná iba svoje číslo a to, že súčet čísel všetkých kamarátov je 100. Jeho číslo teda musí byť nepárne. Jediný spôsob, ako by potom mohol byť súčet čísel kamarátov rovný 100, je, že jeden z dvojice Tymiána a Džinus by mal nepárne číslo a ten druhý párne. Ak by mal Aradin párne číslo, mohla by nastať situácia, že všetci traja by mali párne číslo, čiže Aradin by nevedel prehlásiť, že Džinus nemá rovnaké číslo ako Tymiána.

Z tretieho výroku sa dozvedáme, že Tymiána už vie, že kamaráti majú rozdielne čísla, a zároveň z neho vyplýva, že na začiatku to ešte nevedela. Ak by jej číslo bolo nepárne, tak by už od začiatku mohla vedieť, že Džinus a Aradin majú rôzne čísla, keďže by jedno z nich muselo byť párne a druhé nepárne. Zároveň od začiatku vie, že jej číslo nemá Džinus ani Aradin, keďže je aspoň 50. To by ale bolo v rozpore s tým, že na začiatku ešte nevedela, že majú všetci rôzne čísla. Preto musí byť jej číslo párne. Musí mať zároveň nejakú vlastnosť, pomocou ktorej vie prehlásiť, že Aradin a Džinus majú rozdielne čísla.

Určite $a + d$ je párne. Na to, aby sme dostali $a + d + t = 100$, musí platiť, že 4 delí $a + d + t$. To dosiahneme iba vtedy, ak $a + d$ aj t majú zvyšok po delení štyrmi 2 alebo 0.

Uvažujme, že Aradin a Džinus majú rovnaké čísla, teda $a = d$. Ak by zvyšok ich súčtu po delení číslom 4 bol 2 (nebol by deliteľný číslom 4), muselo by aj t mať zvyšok 2 po delení číslom 4, inak by ich súčet nemohol byť 100. Potom by sme však dostali, že $a + d = a + a$ je párne, čo už ale vieme. Z toho vyplýva, že Aradin aj Džinus by mohli mať rovnaké čísla. Tymiána by tak nevedela s určitosťou prehlásiť, že všetci majú rôzne čísla.

Ak by však súčet ich čísel bol deliteľný číslom 4, a teda aj t bolo deliteľné štyrmi, muselo by platiť, že 4 delí $2 \cdot a$. To nemôže byť pravda, keďže Aradin aj Džinus majú nepárne čísla. Nemôže nastať situácia, že Aradin a Džinus budú mať rovnaké čísla, ak Tymiánino číslo bude deliteľné štyrmi.

V štvrtom výroku Džinus prehlasuje, že pozná čísla všetkých ostatných. To znamená, že on sám musí mať také číslo, že existuje práve jedna dvojica čísel doplňajúca jeho číslo, ktorá spĺňa všetky požiadavky (Tymiána má párne číslo väčšie alebo rovné 50 deliteľné štyrmi, Džinus s Aradinom majú rôzne nepárne čísla a súčet všetkých čísel je 100).

Tymiánino číslo musí teda byť 52. Je to najmenšie číslo, ktoré spĺňa podmienky (je aspoň 50 a deliteľné štyrmi). Ak by totiž mala akékoľvek väčšie číslo, nevedeli by sme ho jednoznačne určiť. Prípustná by potom bola možnosť, ak by mala Tymiána číslo 52 a rozdiel by sa rozložil medzi Džinusa a Aradina.

Jednou možnosťou je, ak by mal Džinus číslo 47 a Tymiána 52. Aradinovi by teda zostalo číslo 1 aby sedel súčet. Druhou je, ak by Džinus mal číslo 45, Tymiána 52 a Aradin 3. Ak by mal Aradin väčšie číslo, tak by Džinus nevedel jednoznačne zo súčtu povedať, či má to väčšie číslo Aradin alebo Tymiána (čísla 43, 5 a 52 dávajú rovnaký súčet ako 43, 1, 56). Existujú teda iba tieto dve riešenia.

Komentár

Ako väčšina z vás vo svojich riešeniach správne podotkla, ak by Tymiána mala párne číslo, tak by mohla nastať situácia, že Džinus a Aradin majú rovnaké čísla, teda Tymiána by nemohla s istotou prehlásiť, že všetci traja majú rôzne čísla. Táto úvaha je pravdivá. No ak by to bolo takto, mohla to povedať ihneď na začiatku. To, že má párne číslo, nie je problém, lebo to, že Aradin a Džinus majú rozdielne čísla, sa dozvedela až po Aradinovom výroku.

4 opravovali: **Martin „Iskra“ Dudjak** a **Oskar Cacara**

najkrajšie riešenia: Hanka Erdélyiová a Riško Semanišin

42 riešení

Zadanie

Tymiána si do piesku napísala tri rôzne prirodzené čísla a označila si ich a, b, c. Následne zistila, že všetky tieto 3 čísla sú prvočísla a aj všetky 3 rozdiely medzi týmito číslami po dvojiciach sú prvočísla. Aké čísla mohla Tymiána napísať do piesku? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Keďže sú prvočísla rôzne a nezáleží na tom, ktoré je najväčšie a ktoré najmenšie, môžeme povedať, že $a > b > c$. Pozrime sa na situáciu, keď by všetky tri prvočísla boli nepárne. Vieme, že rozdiel dvoch nepárnych čísel je párne číslo. Pre naše prvočísla a, b a c sú rozdiely $a - b$, $a - c$ a $b - c$. Pri troch nepárnych prvočíslach sú všetky tri rozdiely párne, takže čísla $a - b$, $a - c$ a $b - c$ by museli byť deliteľné 2. Jediné párne prvočíslo je 2, všetky tri rozdiely potom musia byť rovné 2. Číslo $a - c$ dostaneme ako súčet $a - b$ a $b - c$. Malo by teda platiť, že $2 = 2 + 2$, čo je nezmysel. Všetky tri prvočísla preto nemôžu byť nepárne.

Keďže prvočísla sú rôzne a existuje len jedno párne prvočíslo, z čísel a, b a c budú dve nepárne a jedno párne. Jediným párnym prvočíslom je 2, ktoré je zároveň najmenšie prvočíslo, čiže neexistujú menšie prvočísla ako 2. Preto $c = 2$. Teraz a a b sú nepárne a ich rozdiel bude preto párny. Zároveň ich rozdiel $a - b$ má byť prvočíslo. Ako sme už spomenuli vyššie, párne prvočíslo je len jedno. To je 2, takže $a - b = 2$.

Keďže platí $a - b = 2$, môžeme si a napísať ako $b + 2$. Rozdiel b a c môžeme napísať ako $b - 2$, keďže $c = 2$. Pozrime sa na deliteľnosť čísel $b + 2$, b a $b - 2$ troma. Ak dáva číslo b po delení trojkou zvyšok 2, potom $b - 2$ je deliteľné 3. Ak dáva číslo b po delení 3 zvyšok 1, potom $b + 2$ je deliteľné 3. Ak dáva číslo b po delení 3 zvyšok 0, potom samotné b je deliteľné 3. Zistili sme, že jedno z čísel $b + 2$, b a $b - 2$ musí byť deliteľné 3. Jediné prvočíslo deliteľné 3 je 3.

- Ak $b + 2 = 3$, potom $b = 1$, čo nie je prvočíslo.
- Ak $b = 3$, potom $b - 2 = 1$, čo nie je prvočíslo.
- Ak $b - 2 = 3$, potom $b = 5$, čo je prvočíslo.

Máme len jednu možnosť, a to $b = 5$. Platí $(a - b) = 2$, takže $a = 7$. Jediné riešenie je, že Tymiána do piesku napísala trojicu prvočísel 7, 5 a 2.

Komentár

Mnohým z vás sa s úlohou podarilo popasovať na 9 bodov. Najväčším kameňom úrazu úlohy bola časť, kde bolo potrebné nájsť tri prvočísla také, aby rozdiely medzi susednými prvočíslami boli 2. Tu niektorí z vás prehlásili, že to musia byť 3, 5 a 7. Je potrebné to ale dokázať, napríklad tak, ako vo vzorovom riešení. Dajte si na to pozor, aby ste nabudúce nestratili body. :)

5

opravovali: **Gertrúda „Mimi“ Hanusová** a **Sarka Klopštock**

najkrajšie riešenie: Stanislav Beneš

22 riešení

Zadanie

Do každého riadku tabuľky 9×9 vyšitej na koberci zapíšeme jednu z cifier od 1 do 9 v poradí tak, že v prvom stĺpci začneme ľubovoľnou cifrou a potom do stĺpca napravo píšeme stále číslicu o 1 väčšiu, ale po 9 píšeme 1 (napr. v riadku môžu byť zaradom čísla 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Tabuľka je úžasná, ak v každom riadku, v každom stĺpci aj na každej najdlhšej diagonále (z rohu do rohu tabuľky) je napísané 9-ciferné číslo, ktoré je deliteľné číslom 9. Koľko rôznych úžasných tabuliek existuje?

Riešenie

Kritérium pre deliteľnosť deviatimi znie nasledovne: Ak je súčet cifier čísla deliteľný deviatimi, je aj toto číslo deliteľné deviatimi. Budeme sa počas celého riešenia pozerať iba na súčty cifier v riadkoch, v stĺpcoch a na diagonálach a nie na deväťciferné čísla. V každom riadku sa nachádza každé číslo od 1 po 9 práve raz. Súčet každého riadku je $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, čo je deliteľné deviatimi. Každý riadok teda je deliteľný deviatimi.

Pred pokračovaním na stĺpce a diagonály si uvedomme, čo sa deje s číslom v tabuľke pri prechode cez koniec cyklu (z 9 na 1). Keď k číslu 9 pripočítame 1, dostaneme 10. Aby sme dostali 1, stačí odčítať 9. Keby sme vždy pričítali 1, namiesto 1 písali 10 a tak ďalej, iba by sme k niektorým číslam pričítali 9. Zvyšok súčtu po delení deviatkou by bol rovnaký. Vo zvyšku budeme preto prechod cez koniec cyklu zanedbávať.

Teraz sa pozrime na stĺpce a diagonály. Nech prvý stĺpec obsahuje čísla A, B, ..., I a nech $A + B + \cdots + I$ je deliteľné 9. (Ak nie je, tabuľka automaticky nie je úžasná, keďže nejaký jej stĺpec nie je deliteľný 9). Označme súčet $A + B + \cdots + I$ ako X.

Pozrime sa na druhý stĺpec. Keďže v každom riadku sa čísla zvyšujú postupne o 1, V druhom stĺpci sú čísla $A + 1$, $B + 1$, ..., $I + 1$. Ich súčet je $X + 9$, čo je deliteľné 9, keďže X je deliteľné 9. Tým istým spôsobom môžeme vyjadriť súčty zvyšných stĺpcov ako $X + 18$, $X + 27$, ..., $X + 72$, všetky z ktorých sú deliteľné 9.

Pozrime sa teraz na diagonály. Jedna obsahuje čísla A, $B+1$, $C+2$, ..., $I+8$ a druhá $A+8$, $B+7$, $C+6$, ..., I. Súčty oboch diagonál sú $X+1+2+\cdots+8 = X+36$, čo je znova deliteľné 9.

Ukázali sme, že riadky sú deliteľné 9 stále a za predpokladu, že prvý stĺpec je deliteľný 9, sú aj všetky stĺpce a obe diagonály.

Keďže čísla v prvom stĺpci určujú rozloženie celej tabuľky, teraz nám stačí zistiť, koľko možností máme na rozloženie prvého stĺpca. Tu je dôležité si uvedomiť, že nech je prvých 8 čísel stĺpca akýchkoľvek, ich súčet má jeden z deviatich zvyškov po delení 9, teda celý stĺpec má súčet deliteľný deviatimi práve vtedy, keď posledné políčko dáva jeden konkrétny zvyšok. Medzi číslami 1 až 9, ktoré vpisujeme do tabuľky, existuje práve jedno číslo s každým zvyškom, a teda práve jedno číslo, ktoré môžeme dať do posledného políčka, aby bol súčet stĺpca deliteľný 9.

Počet vyhovujúcich rozložení tabuľky je počet všetkých možných rozložení prvých ôsmich čísel prvého stĺpca. Pre každé z ôsmich políčok máme 9 možných cifier, takže počet všetkých rozložení je 9^8.

6

opravovali: **Braňo Ječim** a **Kalista Semancová**

najkrajšie riešenia: Stanislav Beneš a Jakub Jančiga

32 riešení

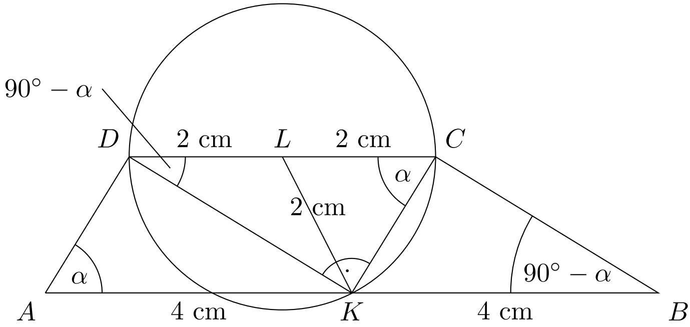
Zadanie

Lichobežníková šatka $ABCD$ je taká, že $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$ a súčet veľkostí uhlov DAB a CBA je $90°$. Zistite, akú vzdialenosť môžu mať medzi sebou stredy základní AB a CD. Úlohu neriešte meraním.

Riešenie

Urobme si náčrt, označme stred základne lichobežníka AB ako bod K a stred základne CD ako L. Súčet veľkostí uhlov DAB a CBA je $90°$. Označme si teda $|\sphericalangle DAB|$ ako α a $|\sphericalangle CBA|$ ako $90° - \alpha$.

Dokreslíme si úsečky KC a KD, $AKCD$ je rovnobežník, lebo $|AK| = |DC|$ a AK je rovnobežná s DC. V rovnobežníku sú protiľahlé uhly zhodné, preto v našom $|\sphericalangle DCK| = |\sphericalangle DAK| = \alpha$. Podobne aj $BKDC$ je rovnobežník, keďže $|KB| = |DC|$ a KB je rovnobežná s CD. Potom $|\sphericalangle CDK| = |\sphericalangle CBK| = 90° - \alpha$, lebo v rovnobežníku sú protiľahlé uhly zhodné. Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$, tak $|\sphericalangle DKC| = 180° - |\sphericalangle DCK| - |\sphericalangle CDK| = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. Trojuholník DCK je potom pravouhlý, preto následne zostrojíme Tálesovu kružnicu s priemerom DC, na ktorej musí ležať bod K. LK je polomer tejto kružnice, polovica priemeru DC, čo sú $4 : 2 = 2$ cm.



Iné riešenie

Podobne ako v prvom riešení si označme stred základne lichobežníka AB ako bod K a stred základne CD ako L.

Predĺžime si úsečky AD a BC. Pretnú sa v bode, ktorý si označíme ako X. Vznikol nám trojuholník ABX.

Keďže DC je rovnobežná s AB a zároveň má polovičnú dĺžku ako AB, tak je to stredná priečka trojuholníka ABX. Z toho vieme, že trojuholníky DCX a ABX sú podobné. Koeficient tejto podobnosti je $1:2$ ($|DC|:|AB| = 4:8 = 1:2$).

V trojuholníku ABX poznáme dva vnútorné uhly, takže si vieme dopočítať tretí:

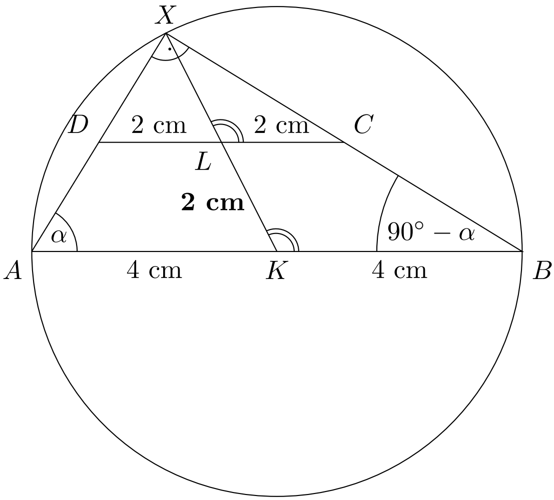
$$|\sphericalangle AXB| = 180° - |\sphericalangle XAB| - |\sphericalangle ABX| = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°.$$

Teda trojuholník ABX je pravouhlý. Vieme mu opísať Tálesovu kružnicu so stredom K a polomerom polovice z dĺžky strany AB, to jest 4 cm. Z toho nám vyplýva, že XK je tiež polomer tejto kružnice, teda $XK = 4$ cm.

Ukázali sme si, že DC je strednou priečkou ABX. Potom ťažnica XK trojuholníka ABX rozpoľuje strednú priečku DC (vyplýva z podobnosti trojuholníkov). Ich priesečníkom je teda bod L, a preto body X, L a K ležia na jednej priamke.

Vieme, že trojuholníky DCX a ABX sú podobné s koeficientom podobnosti $1:2$. Potom aj veľkosti ich ťažníc XL a XK sú v pomere $1:2$. Teraz $|XL|:|XK| = 1:2$, a teda $|XL| = |XK|:2 = 4:2 = 2$ cm. Nakoniec môžeme konečne dopočítať

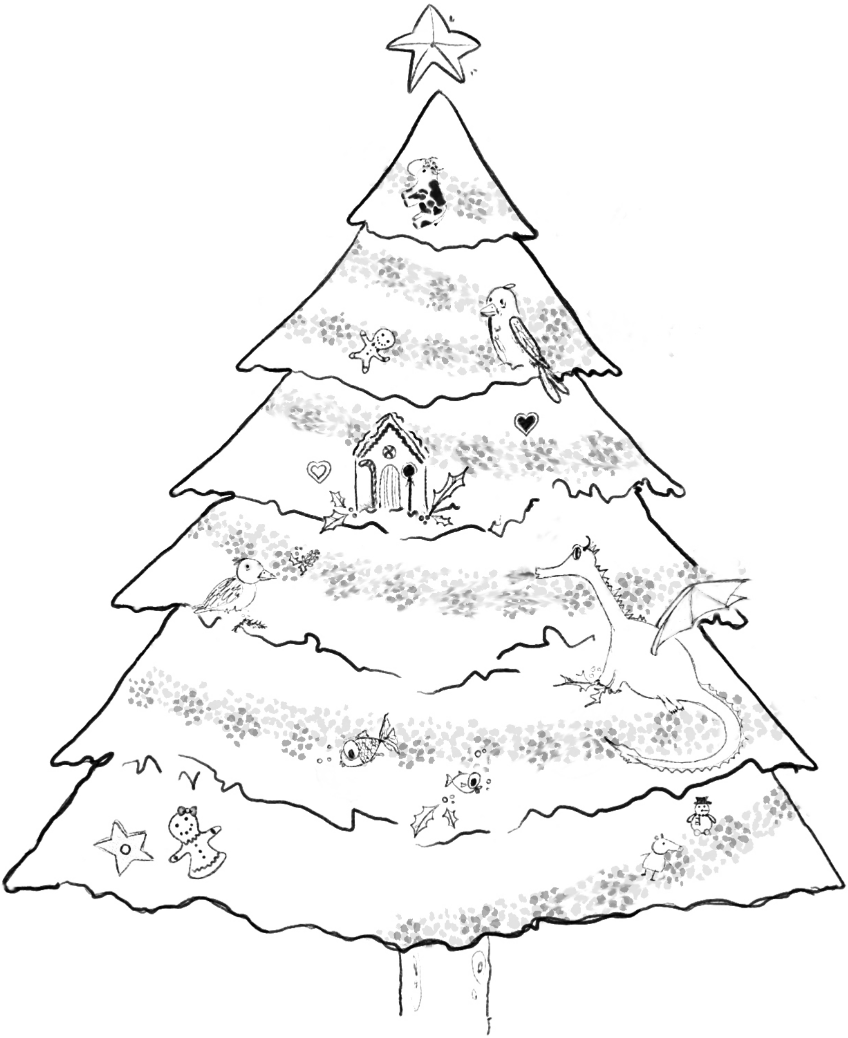
$$|LK| = |XK| - |XL| = 4 - 2 = 2\,\text{cm}.$$



Komentár

Milo nás prekvapilo, že aj keď úloha bola šestkou, obdržali sme od vás veľa pekných, nápaditých a originálnych deväťbodových a osembodových riešení. V niektorých z nich sme bohužiaľ museli jeden bod strhnúť, keďže v týchto riešeniach nebolo zdôvodnené, prečo bod L leží na XK (resp. prečo polpriamka KL prechádza bodom X). Aj keď sa to zdá byť triviálne, považovali sme za potrebné to spomenúť.

Okrem toho najčastejšou chybou bolo to, že ste niektorí predpokladali, že vzdialenosť stredov základní je výška. To však platí iba pre rovnoramenný lichobežník, ale pre ostatné nie. Mnohí ste si lichobežníky načrtli symetricky a to mohlo byť príčinou tejto nesprávnej úvahy.



Konečné poradie zimného semestra 38. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 2.	Richard Semanišin	Z8	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Adam Horváth	Z8	GAlejKE	54	9	9	5	9	9	9	**108**
3. - 5.	Hana Erdélyiová	Z9	GAMČABA	53	9	9	8	9	9	9	**106**
	Alena Chladná	Z9	GAMČABA	54	9	9	8	9	9	8	**106**
	Richard Futáš	Z8	ZPAngKE	52	9	9	9	9	9	9	**106**
6.	Dominik Feňovčík	Z9	ZBeleKE	52	9	7	9	9	9	9	**104**
7.	Stanislav Beneš	Z8	GJNHPha	49	8	8	9	9	9	9	**102**
8.	Hana Lascsáková	Z7	ZHronKE	51	9	9	5	9	0	9	**101**
9.	Marko Vasiľ	Z7	GAlejKE	51	9	9	5	9	-	8	**100**
10. - 11.	Jakub Jančiga	Z8	ZGoraZA	48	9	6	2	9	9	9	**99**
	Elena Mikušová	Z7	GAMČABA	52	9	9	5	7	-	8	**99**
12.	Tomáš Cabúk	Z9	SGFutKE	46	9	9	5	9	9	9	**96**
13.	Alica Földesová	Z8	VSCharlott	46	9	6	9	4	8	9	**95**
14.	Matúš Varhoľák	Z7	ZSCaMKE	51	9	9	5	9	1	2	**94**
15.	Filip Feher	Z8	ZPAngKE	43	9	9	5	9	-	9	**93**
16.	Branislav Jendroľ	Z7	ZČeskáBA	48	9	6	4	7	-	9	**92**
17. - 18.	Vojto Bálint	Z9	CZRZaZA	44	9	6	6	9	9	8	**91**
	Lucia Babjakova	Z7	GsvTAKE	45	9	9	5	5	0	9	**91**
19.	Tomáš Budaj	Z7	ZPAngKE	40	9	9	8	5	6	9	**90**
20.	Alica Bágeľová	Z7	GAMČABA	46	9	5	7	9	-	1	**86**
21.	Tomáš Urmanič	Z8	GAMČABA	48	6	-	6	9	9	1	**85**
22.	Jakub Katrák	Z9	ZPoliKE	44	9	9	6	6	0	8	**82**
23.	Marek Mičko	Z8	ZKro4KE	47	9	9	4	1	-	7	**81**
24.	Nelly Hašková	Z8	GAlejKE	47	9	-	5	6	6	2	**80**
25.	Zoja Ondrišeková	Z8	GAMČABA	42	-	9	5	9	0	9	**79**
26.	Hana Ihnátová	Z9	ZObcSeč	35	9	9	4	9	0	8	**74**
27.	Martin Štefanides	Z8	GAMČABA	52	9	-	2	5	-	-	**68**
28.	Marek Babuščák	Z8	GAlejKE	45	5	9	-	4	-	2	**67**
29.	Adam Feher	Z7	ZPAngKE	38	4	5	5	7	-	-	**64**
30.	Mirra Volchenko	Z7	GAlejKE	31	9	-	5	5	-	6	**62**
31. - 32.	Elena Kundríková	Z8	ZKro4KE	47	6	-	4	4	-	-	**61**
	Michal Revický	Z9	GJARMPO	32	9	-	7	5	-	8	**61**
33.	Paulína Pastuchová	Z8	ZBe16KE	36	6	-	4	4	0	2	**54**
34.	Ondrej Medo	Z8	OWünnewil	27	4	6	6	5	-	-	**52**
35.	Katarína Tóthová	Z8	ZHôrky	50	-	-	-	-	-	-	**50**
36.	Sandra Futášová	Z8	ZPAngKE	31	9	-	-	9	-	-	**49**
37.	Emilián Frischer	Z8	GAlejKE	45	-	-	0	3	-	-	**48**
38. - 39.	Kristína Vojtašková	Z8	ZBe16KE	30	6	1	3	1	0	2	**44**
	Slávka Humeníková	Z7	GAlejKE	44	-	-	-	-	-	-	**44**
40.	Pavol Fejko	Z7	ZZalužice	42	-	-	-	-	-	-	**42**
41.	Kristofer Noel Rjabinčák	Z8	ZKro4KE	41	-	-	-	-	-	-	**41**
42.	Sofia Slavkovská	Z7	GABerSC	38	-	-	-	-	-	-	**38**
43.	Juraj Kando	Z9	ZDnepKE	34	-	-	-	-	-	-	**34**
44.	Damián Fedor	Z9	ZJuhVnT	27	-	-	-	-	-	-	**27**
45.	Lýdia Mikušáková	Z8	GAlejKE	25	-	-	-	-	-	-	**25**
46. - 47.	Lucia Bágeľová	Z7	GMetoBA	24	-	-	-	-	-	-	**24**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Júlia Rusnáková	Z7	ZKe30KE	16	4	-	-	2	-	-	**24**
48. - 49.	Veronika Štiavnická	Z8	ZKro4KE	16	-	-	5	1	-	-	**22**
	Teodor Vysoký	Z8	ZTSNPBB	22	-	-	-	-	-	-	**22**
50.	Michal Hudák	Z8	GAlejKE	14	-	-	5	-	-	2	**21**
51.	Patrik Sklenár	Z8	GTVanSL	10	0	2	5	2	-	-	**19**
52.	Simona Stahovcová	Z8	ZPAngKE	18	-	-	-	-	-	-	**18**
53. - 54.	Andrej Onderisin	Z7	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	**17**
	Matúš Marček	Z8	ZTSNPBB	17	-	-	-	-	-	-	**17**
55. - 56.	Viliam Vrchovinsky	Z8	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Natália Kropuchová	Z9	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
57.	Adela Polomská	Z9	ZKro4KE	14	-	-	-	-	-	-	**14**
58.	Veronika Vavreková	Z9	ZKro4KE	11	0	-	-	1	-	-	**12**
59. - 60.	Richard Varecha	Z6	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
	Matúš Katina	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
61.	Filip Komjáti	Z6	GAlejKE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
62. - 63.	Miroslav Slivko	Z9	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Leo Torma	Z9	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	-	**6**
64.	Roman Schütz	Z7	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
65.	Slavomira Synott	Z9	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	**1**
66. - 67.	Stanislav Cabúk	Z5	ZŠvedlár	0	0	-	-	-	-	-	**0**
	Dávid Borták	Z7	ZKro4KE	0	-	-	0	0	-	-	**0**

Názov:	*MATIK* – korešpondenčný matematický seminár Číslo 3 • December 2024 • Zimný semester 38. ročníka
Web:	`matik.strom.sk`
E-mail:	`matik@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Autori vzorových riešení:	Nina Anna Betáková, Mišo Vodička, Megy Škriabová, Ľubo Vargovčík, Viliam Geffert, Nina Hudáková, Martin „Iskra“ Dudjak, Oskar Cacara, Gertrúda „Mimi“ Hanusová, Sarka Klopštock, Braňo Ječim, Kalista Semancováy

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.