STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Milí riešitelia,

je po prázdninách a prichádza nový ročník **STROM**u. Je plný noviniek. Veď i sami to vidíte, držiac v rukách nové zadania... Zmenil sa počet úloh, bočet bodov, bonifikácia. Na stránke pribudla nová súťaž, ktorá vás určite zaujme. Prejdime však od slov k činom; prečítajme si pravidlá a začnime rátať.

KMM pokračuje

Ako minulý semester, tak aj teraz pokračujú KMM – Kluby mladých matematikov. Najbližší sa uskutoční 22. septembra o 10:00 na PF UPJŠ v Košiciach. Prednášajúci nebude nikto iný ako Ing. RNDr. František Kardoš (Feri) a porozpráva nám o tom, čo všetko sa dá vyčítať z grafu funkcie. No a ako sa vraví, nielen matematikou je človek živý. Po dobrej prednáške a dobrom obede si zahráme v parku frisbee, prípadne iný šport. Termíny ďalších klubov a akcií po prednáške nájdete na `http://seminar.strom.sk/kmm`.

Problem of the week

Tak veru, čítate dobre. Nejaká matematika tu bude každý týždeň. A to nie hocijaká, ale interaktívna. Od 3. septembra na stránke `http://seminar.strom.sk/pow` nájdete každý týždeň nejakú úlohu. Na jej zrátanie budete mať týždeň a pomocou internetového formulára hneď môžete svoje riešenie odoslať. Ak pošlete hneď v pondelok a správne, dostanete za riešenie 7 bodov. Ak až v posledný deň, čo je nedeľa, tak to bude už len jeden bod. Avšak pozor, ráta sa iba prvé odoslané riešenie a tak odporúčame netipovať. Najlepších z vás čaká prekvapenie.

PALMA

Aj tento rok pre vás pripravujeme programátorskú súťaž pre stredoškolské družstvá s názvom PALMA. Radi uvítame všetkých, ktorí majú chuť si zasúťažiť, otestovať svoje riešiteľské schopnosti, prípadne sa niečo nové naučiť. Bližšie informácie či úlohy z minulého ročníka nájdete na domovskej stránke súťaže: `http://palma.strom.sk`.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.
Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou, alebo e-mailom, nie osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk`. Preferujeme súbory vo formáte PDF. Každú úlohu posielajte osobitne a do predmetu e-mailu napíšte (bez diakritiky) Uloha 1, respektíve Uloha 2, respektíve Uloha 3, respektíve Uloha 4. Vaše riešenia musia dôjsť pred polnocou v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne.
S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**, (prípadne ju vyplňte na stránke `http://seminar.strom.sk`). Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.
Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do poradia sa započítavajú všetky štyri úlohy + úloha podľa ročníka riešiteľa.
Prvákom sa do poradia navyše započítava najlepšie vyriešená úloha.
Druhákom sa do poradia navyše započítava druhá najlepšie vyriešená úloha.
Tretiakom sa do poradia navyše započítava tretia najlepšie vyriešená úloha.
Štvrtákom sa do poradia navyše započítava najhoršie vyriešená úloha.
Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.
Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú -1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú -3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to -5 hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.
Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri -3 alebo menej hlasov.

Zadania úloh zimného semestra 32. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **15. 10. 2007**

1. V krajine **STROM**ovo je každé mesto spojené leteckými linkami s nanajvýš tromi inými mestami. Všetky letecké linky sú obojsmerné. Z ľubovoľného mesta sa vieme do ľubovoľného iného mesta dostať lietadlom s nanajvýš jedným prestupom. Koľko najviac miest môže byť v tejto krajine?
Ak si myslíte, že správna odpoveď je 325*, Vaše riešenie by malo obsahovať nielen ukážku toho, že* 325 *miest je možných, ale aj zdôvodnenie, že viac miest byť v krajine nemôže.*

2. Danka a Janka hrajú na šachovnici s veľkosťou 5×5 hru, pri ktorej sa striedajú v ťahoch. Tá, ktorá je na ťahu, zakryje dve ešte nezakryté políčka šachovnice kúskom domina veľkosti 2×1 (resp. 1×2). Prehráva hráčka, ktorá nemôže urobiť ťah. Pod dĺžkou (ukončenej) hry rozumieme počet ťahov, ktoré sa uskutočnili. Aká najdlhšia a aká najkratšia hra sa dá zahrať pri takýchto pravidlách?
Nezabudnite uviesť okrem príkladu najdlhšej hry aj dôvody, pre ktoré žiadna iná hra nemôže byť dlhšia. Podobne pre najkratšiu možnú hru.

3. Daný je trojuholník ABC. Uvažujme bod P, ktorý leží v trojuholníku ABC na osi strany AB. K nemu zostrojíme body Q a R ležiace mimo trojuholníka ABC tak, aby trojuholníky BQC a CRA boli podobné s trojuholníkom APB.
a) Nájdite všetky body P také, že body P, Q, C, R ležia na priamke.
b) Predpokladajme, že body P, Q, C, R neležia na priamke. Dokážte, že potom vytvárajú rovnobežník.
V časti a) nestačí len nájsť tieto body. Treba aj zdôvodniť, prečo iné body nevyhovujú.

4. Majme štyri navzájom rôzne kladné reálne čísla. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri čísla a označiť ich a, b, c tak, že rovnice $ax^2 + x + b = 0$ (s neznámou x), $by^2 + y + c = 0$ (s neznámou y) a $cz^2 + z + a = 0$ (s neznámou z) buď všetky majú reálny koreň, alebo žiadna z nich nemá reálny koreň.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **19. 11. 2007**

1. a) Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel také, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.
b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel také, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

2. a) Dokážte, že pre všetky $k > 1$ existuje k-tica prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.
b) Rozhodnite, pre ktoré $k > 1$ existuje k-tica navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

3. V rovine je daná priamka p a bod C, ktorý na nej neleží. Po priamke p sa pohybuje úsečka AB pevnej dĺžky d.
a) Zostrojte trojuholník ABC, ak okrem daného bodu C, priamky p a dĺžky d poznáte veľkosť polomeru R kružnice opísanej trojuholníku ABC.

b) Pre ktorú polohu úsečky AB má trojuholník ABC najväčší obsah?
c) Pre ktorú polohu úsečky AB má kružnica vpísaná do trojuholníka ABC najväčší polomer?
V úlohách b) a c) treba nájsť všetky také polohy a zdôvodniť, prečo sú to len tie a žiadne iné.

4. V rovine je daná priamka p a bod C, ktorý na nej neleží. Po priamke p sa pohybuje úsečka AB pevnej dĺžky d.
a) Po akej dráhe sa pohybuje priesečník výšok V trojuholníka ABC?
b) Po akej dráhe sa pohybuje ťažisko T trojuholníka ABC?
c) Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná dĺžka úsečky AB, vzdialenosť bodu C od priamky AB a súčin dĺžok ťažníc z vrcholov A a B.
V úlohách a) a b) treba podrobne popísať, do ktorých bodov roviny sa môže uvažovaný bod (V, resp. T) dostať pri pohybe úsečky AB. Nezabudnite zdôvodniť, že sú to všetky také body, teda že do iných bodov sa uvažovaný bod dostať nemôže.

Návodné úlohy k sériám úloh Zimného semestra

Možno sa vám úlohy v sériách zdajú ťažké, alebo ste sa s takýmito úlohami ešte nikdy nestretli. Pripravili sme preto niekoľko návodných úloh. Po ich vyriešení (a prečítaní si uvedených riešení) by ste mali získať lepšiu predstavu, ako sa dá postupovať pri riešení úloh v sériách i vo všeobecnosti. S nejasnosťami sa na nás môžete obrátiť napríklad e-mailom (`navodne@strom.sk`).

1. Nakreslite si v rovine 7 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Pospájajte ich úsečkami tak, aby z každého bodu vychádzali tri úsečky.

2. Hráme hru lode na pláne 7×7, na ktorom sa nachádza jediná loď veľkosti 4×1 (resp. 1×4). Najmenej koľko otázok sa potrebujeme spýtať, aby sme si boli istí, že sme túto loď zasiahli aspoň raz?

Riešenie: Po chvíli hrania sa s plánom a otázkami zistíme, že 12 otázok stačí. (Ako sa treba pýtať?) Navyše získame presvedčenie, že 11 otázok je málo. Ako to však zdôvodniť? Skúsme nájsť aspoň nejaký dolný odhad. Stačí jedna otázka? Určite nie, vieme na plán umiestniť dve lode tak, že sa na obe treba spýtať (nemajú spoločné políčko). Keďže potrebujeme vylúčiť obe tieto možné polohy lode, musíme sa spýtať aspoň dvakrát. Vedeli by sme tam tých lodí umiestniť viac? Koľko ich treba umiestniť, aby sme tým dokázali, že 11 otázok nestačí? Skúste tam tie lode umiestniť. Uvážte si, koľko voľných políčok ostane. Ak by ste chceli tieto voľné políčka rozmiestniť symetricky, kde by mali byť?

3. Hráme hru lode na pláne 9×9, na ktorom sa nachádza jediná loď veľkosti 5×1 (resp. 1×5). Najmenej koľko otázok sa treba spýtať, aby sme si boli istí, že sme túto loď zasiahli aspoň raz?

4. Hráme hru lode na pláne 8×8, na ktorom sa nachádza jediná loď veľkosti 2×2. Najmenej koľko otázok sa treba spýtať, aby sme si boli istí, že sme túto loď zasiahli aspoň raz?

5. Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y také, že platí $x^2 + 2x = 5y + 6$.

Riešenie: Táto rovnica má v reálnych číslach hromadu riešení. Kde to viazne pri celých číslach? Keby sme rovnicu riešili v obore reálnych čísel, zvolíme si ľubovoľné x a k nemu dorátame y. (Prečo nie naopak?) K danému x dostaneme $y = (x^2 + 2x - 6)/5$. Vyskúšajte niekoľko malých x. A vidíme, kde je háčik: číslo y nemusí vyjsť celé. Po chvíli získame presvedčenie, že celé dokonca asi nevyjde nikdy. Opäť si položíme otázku: je možné, aby číslo $x^2 + 2x - 6$ bolo deliteľné 5? Táto otázka sa dá položiť aj všeobecnejšie a potom sa na ňu napodiv ľahšie odpovedá: aký zvyšok môže číslo $V = x^2 + 2x - 6$ dávať po delení 5? Ak x dáva zvyšok 0, 1, 2, 3, 4, číslo V dáva zvyšok 4, 2, 2, 4, 3 (overte si dosadním $x = 5k + z$, kde z je zvyšok). Preto V nikdy nebude deliteľné 5 a hľadaná dvojica x, y neexistuje.

Poznámka: Všimnite si, že si počas riešenia kladieme otázky. A dokonca aj také, ktoré sa pýtajú na viac, než vyžaduje zadanie alebo než práve potrebujeme. Toto nám pomáha odhaliť podstatu problému. A dobre uchopený problém je už napoly vyriešený.

Poznámka: Ak by sme vyjadrovali na začiatku x pomocou y, dostaneme, že diskriminant kvadratickej rovnice $x^2 + 2x - 5y - 6 = 0$ (s neznámou x a parametrom y) musí byť druhou mocninou celého čísla (premyslite si, prečo je to tak). Druhú mocninu celého čísla inak nazývame *štvorcom*. Takže $D = 20y + 28 = 2^2(5y + 7)$ musí byť štvorcom. Potom aj číslo $5y + 7$ musí byť štvorcom (ak by nebolo, v jeho rozklade na prvočísla by nejaké prvočíslo malo nepárny exponent, a toto prvočíslo by malo nepárny exponent aj v D). Výraz $5y + 7$ môže byť pre vhodné celé číslo y rovný ľubovoľnému celému číslu, ktoré dáva zvyšok 2 po delení 5. Preto sa náš problém redukuje na otázku, či je možné, aby štvorec dával zvyšok 2 po delení 5. Odpoveď získame podobným preskúmaním zvyškov ako v predošlom riešení.

6. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že platí $x^2 + 1 = 3y^3$.

7. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že platí $x^4 + y^4 = 2007^{2007}$.

8. Vyriešte v prirodzených číslach rovnicu $x^2 = y^2 + 3$.

Riešenie: Skúsime rovnicu upraviť tak, aby sa niečo dalo rozložiť na súčin. Tento postup je často používaný v úlohách z teórie čísel, hneď uvidíme jednu z výhod, ktoré prináša.
Riešime teda rovnicu $x^2 - y^2 = 3$. *Rozložíme ľavú stranu na súčin.*

$$(x + y) \cdot (x - y) = 3$$

Predstavme si, že obe strany sú rozložené na prvočísla. Na pravej strane je jediná trojka. Preto aj v rozkladoch dvoch *celých* čísel na ľavej strane je len jedna trojka, a teda jedno z týchto čísel musí byť rovné 1 alebo -1 a to druhé je 3 alebo -3. Keďže x aj y sú prirodzené, máme $x+y > x-y > 0$ a preto $x + y = 3$, $x - y = 1$. Jediným riešením tejto sústavy rovníc je dvojica $x = 2$, $y = 1$.

9. Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je číslo $(n - 13)(n + 11)$ druhou mocninou prvočísla.

10. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje len konečne veľa celých čísel x s vlastnosťou

$$2^x = x^2 + n.$$

Poznámka: Takéto čísla x samozrejme nemusia existovať vôbec. Skúste vyriešiť zadanú rovnicu pre $n = 1$, prípadne niekoľko iných n. Vyriešiť rovnicu znamená nájsť všetky riešenia, zdôvodniť, že sú riešeniami (napr. skúškou správnosti), a odôvodniť, prečo žiadne iné čísla nie sú riešeniami. Väčšinou je podstata problému v poslednej časti, teda vylúčení ostatných čísel.

Riešenie: Nech n je pevne dané prirodzené číslo. Všímajme si ľavú a pravú stranu ako funkcie premennej x. Zvoľte si n a dosádzajte postupne za x čísla $1, 2, 3, 4, 10, 100, \ldots$ Vidno, že ľavá strana rastie oveľa rýchlejšie ako pravá. Preto „dostatočne veľké“ x už nemôže byť riešením skúmanej rovnice. Toto je kľúčová myšlienka, zvyšok riešenia tento intuitívny pohľad spresní a spraví z neho matematický dôkaz, ktorým hocikoho presvedčíme.
Záporné x nemôže byť riešením skúmanej rovnice (prečo?), preto sa obmedzíme na nezáporné x. Určite existuje také prirodzené číslo x_0, že $x_0^2 > n$. Nezáporných celých čísel menších ako x_0 je len konečne veľa. Z tejto úvahy vyplýva, že stačí dokázať, že $2^x > 2x^2$ pre každé $x \geq x_1$, kde $x_1 \geq x_0$ je nejaké celé číslo. (Potom je $2^x > 2x^2 \geq x^2 + x_0^2 > x^2 + n$. Premyslite si to.)
Zbavili sme sa čísla n. Dôkaz nerovnosti $2^x > 2x^2$ (pre $x \geq 7$) je možné spraviť matematickou indukciou podľa x, to už ponechávame na vás. (Možno je vhodné dokázať najprv to, že $2^x > 2x + 1$ pre $x \geq 3$. Keď obe tvrdenia dokážete, pouvažujte nad tým, či platí $2^x > x^7$ pre „veľké“ x.)

11. Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa trojíc *celých* čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

12. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná veľkosť strany AC, dĺžka ťažnice z vrchola C a veľkosť vnútorného uhla pri vrchole C.

Riešenie: Priamo nezostrojíme nič, preto treba pouvažovať o zadaných prvkoch trojuholníka ABC. Ťažnica je spojnica vrchola so *stredom protiľahlej strany*. Preto by stredy strán mohli byť zaujímavé. Označme stredy strán BC, CA, AB písmenami K, L, M (v tomto poradí). Nakreslite si veľký obrázok. Poznáme veľkosť strany AC, preto poznáme aj dĺžku strednej priečky MK. Poznáme veľkosť uhla ACB, preto poznáme aj veľkosť uhla MKB. A z tohto všetkého už vieme zostrojiť trojuholník MKC (ako?). A potom aj body B a A. Podstatu problému sme vyriešili. Ostáva spísať riešenie tak, aby z neho niečo mal aj niekto iný.
Zhrňme si, z čoho by malo pozostávať riešenie konštrukčnej úlohy. V prvom rade je to veľký prehľadný náčrt so slovným popisom prvkov neuvedených v zadaní (v našom prípade to boli body K, L, M). Nasleduje rozbor, ktorý by mal byť podrobnejší než úvahy z predošlého odseku (treba presnejšie popísať vzťahy medzi uvádzanými dĺžkami aj uhlami a tiež súvislosť s konštrukciou). Potom zápis konštrukcie. Často sa zabúda na *dôkaz správnosti konštrukcie* – treba zdôvodniť, že zostrojený objekt má všetky vlastnosti požadované v zadaní. A nakoniec diskusia o počte riešení – koľko rôznych trojuholníkov spĺňa podmienky kladené zadaním? Samotné rysovanie nie je nutné, môže však pomôcť pri diskusii.
Poznámka: Postupovať sa dá aj inak, ak sa inak pozrieme na zadanie. Ťažnica je okrem vrchola určená *stredom* protiľahlej strany. Inak povedané, body A a B sú *súmerné* podľa bodu M. Preto skúsme uvážiť stredovú súmernosť so stredom v bode M. Obraz bodu C v tejto súmernosti označme D. Všimnime si niekoľko faktov:
1. Útvar $ACBD$ je rovnobežník. (Prečo?)
2. Poznáme dĺžku úsečky CD aj veľkosť uhla CAD. (Vyjadrite tieto veľkosti pomocou veľkostí uvedených v zadaní.)
To stačí na zostrojenie trojuholníka CAD.

13. Nech t_a, t_b, t_c sú dĺžky ťažníc trojuholníka s obvodom o. Dokážte, že $\frac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c < o$.

14. Po akej dráhe sa pohybuje stred kružnice opísanej trojuholníku ABC v úlohe 4 z druhej série?

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Copycentrum Pergamon s.r.o.
- Nadačnému fondu Východoslovenskej energetiky, a.s. v Nadácii Pontis

Názov	**STROM** – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 1 • September 2007 • Zimný semester 32. ročníka (2007/2008)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`zdruzenie@strom.sk`