STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte, STROM*áci!*

Prvá séria bola vami už dávno zasadená, vyklíčila a práve teraz prináša svoje plody. Pri tej druhej ste tiež isto využili všetky svoje poľnohospodárske znalosti. Už viete rozlíšiť koreň cibule od koreňa kvadratickej rovnice, a tí skúsenejší aj **STROM** od stromu. Celé **STROM**ácke poľnohospodárske družstvo je na vás veľmi hrdé.
Je to takmer neuveriteľné, ale aj v tomto svete plnom lásky, šťastia a pokoja je miesto, kde sa zvádza neľútostný boj – boj o titul najlepšieho roľníka. Medzi prvou päticou rivalov sa nájde kadečo – jeden z prírodných živlov, ornitológmi doposiaľ nepreskúmaný druh vtáka, Marián z Hornej Zeme, superhrdina Robotot a Mojo. Ale každý v tabuľke, nech už je akokoľvek vzdialený od mien týchto piatich, si zaslúži podobné skomolenie svojho mena :-).
Ľaľa, ďalšia tabuľka, pod tou prvou ukrytá a pohárom konštruktérov zvaná! A aha, kto je na jej čele! Pssst, niečo počujem… krídlo alejákov kričí niečo o pomere :-).
Dosť bolo bojov, lúčim sa s vami myšlienkou z Biblie, Izaiáš 2:4: „Budú musieť prekovať svoje meče na radlice a svoje oštepy na vinárske nože… ani sa už viac nebudú učiť vojne.“
Nech sa darí vašej pôde! Príjemnú zábavu!

Vaši **STROM**isti

Vianočný MaxiKlub

Tak, ako po minulé roky, aj tento rok sa uskutoční neformálne stretnutie riešiteľov, vedúcich, bývalých riešiteľov, bývalých vedúcich a vôbec všetkých ľudí, ktorých spája pozitívny vzťah ku korešpondenčným matematickým seminárom Malynár, Matik a Strom. Inými slovami

Vianočný MaxiKlub Mladých Matematikov,

na ktorý vás všetkých srdečne pozývame. Uskutoční sa v utorok 22. decembra na Prírodovedeckej fakulte na Jesennej 5 v Košiciach, v miestnosti P/12 (druhé poschodie) v čase 12.00 – 18.00.
Tešíme sa na vás všetkých :-)

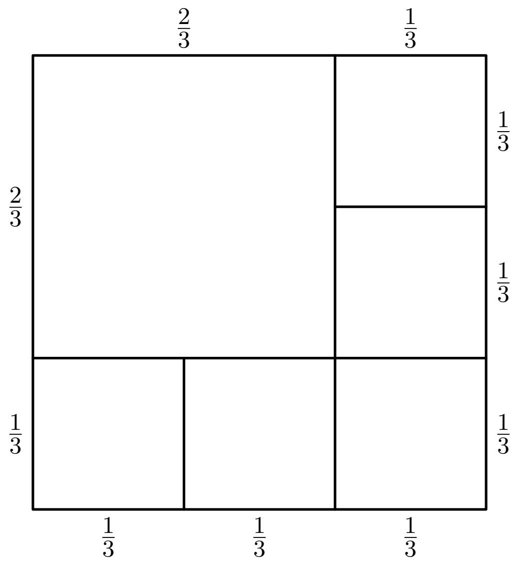
Riešenia 1. série úloh zimného semestra 34. ročníka

1. Je známe, že každý rovnostranný trojuholník vieme strednými priečkami rozdeliť na 4 menšie rovnostranné trojuholníky. Podobne vieme rozdeliť každý štvorec na 4 menšie štvorce. Dokážte, že pre každé $n \geq 6$ vieme ľubovoľný rovnostranný trojuholník rozdeliť na n (nie nutne zhodných) rovnostranných trojuholníkov. Je pravda, že pre každé $n \geq 6$ vieme ľubovoľný štvorec rozdeliť na n (nie nutne zhodných) štvorcov?

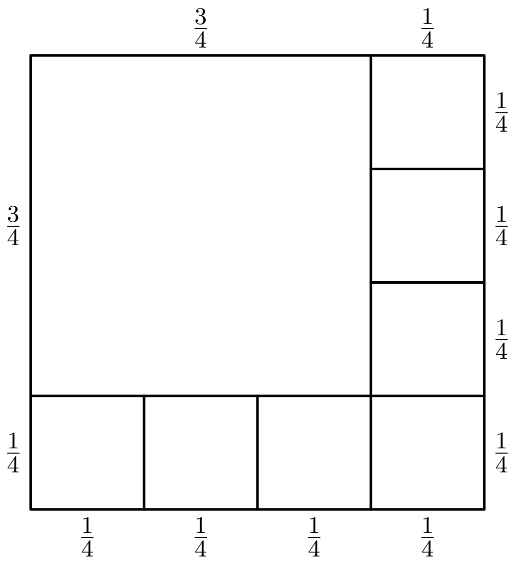
Opravovali: Jakub Sedlák a Vlado „Droopy" Novák **Počet riešiteľov: 57**

<u>**Riešenie:**</u>

Stredné priečky rozdeľujú rovnostranný trojuholník na 4 zhodné rovnostranné trojuholníky. Rovnako osi strán delia štvorec na 4 zhodné štvorce. Pozrime sa najprv na štvorce. Rozdelením štvorca osami strán vzrastie počet štvorcov o 3. Ak by sme toto delenie zopakovali na menšom novovzniknutom štvorci opäť, získame ďalšie tri štvorce. Teraz už máme 7 štvorcov. Ak by sme pôvodný štvorec takto delili k-krát, vzrastie počet častí o $3 \cdot k$. Ak vieme počet štvorcov zvyšovať takto o tri, stačí nám zostrojiť rozdelenia na 6, 7 a 8 častí. Všetky ďalšie možnosti pre $n \geq 6$ už z nich vieme dostať pripočítaním 3. (Premyslite si poriadne, prečo nám to stačí. Nápovedou je matematická indukcia.) Rozdelenie na 7 častí sme popísali vyššie. Rozdelenia na 6 a 8 častí môžete vidieť na obrázkoch:

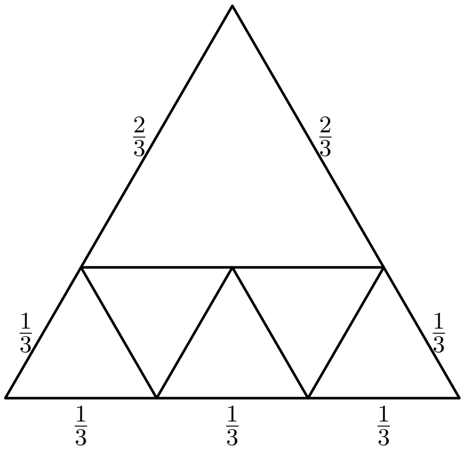


6 častí

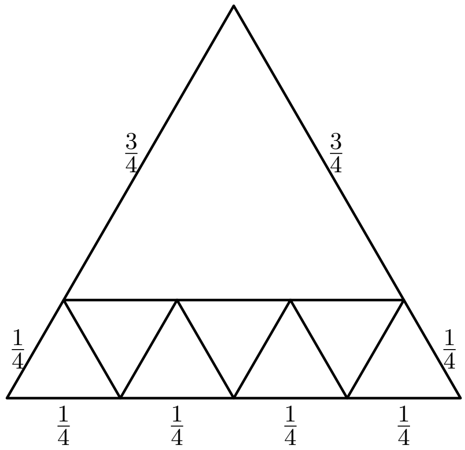


8 častí

Rovnaký princíp funguje aj pre rovnostranné trojuholníky, avšak nebudeme deliť osami strán, ale strednými priečkami. Delenie na 7 častí opäť dostaneme len pomocou dvojnásobného použitia delenia strednými priečkami. Delenie na 6 a 8 rovnostranných trojuholníkov dostaneme napr. takto:



6 častí



8 častí

To, že všetky časti sú rovnostranné trojuholník resp. štvorce vyplýva napríklad z naznačených dĺžok strán.

Komentár: Nakoľko táto úloha nebola až taká ťažká, tak naše hodnotenie riešení bolo pomerne prísne. Niektorí ste síce ukázali možnosti pre vytvorenie delenia na 6, 7 a 8 rovnostranných trojuholníkov, ale nezdôvodnili ste, prečo ukážka týchto delení postačuje. Poniektorí ste neukázali, že vami vytvorené trojuholníky sú naozaj rovnostranné. Preto do budúcna nezabúdajte aj pri ľahko vyzerajúcej úlohe jednotlivé kroky vášho riešenia poriadne zdôvodniť.
Táto úloha vám nerobila problémy, a tak sme s radosťou mohli väčšine z vás dať vysoké počty bodov. Len tak ďalej. :-)

2. Koľko je dvojíc kladných celých čísel (a, b) takých, že a a b sú nesúdeliteľné a navyše

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

je celé číslo? Koľko by ich bolo, ak by a a b boli súdeliteľné?

Opravovali: Gabriela Vozáriková a Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 50**
Riešenie:

a) Čísla a a b sú nesúdeliteľné.
Na začiatok si vyjadríme súčet daných zlomkov v tvare jedného zlomku

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a} = \frac{9a^2 + 14b^2}{9ab}.$$

Tento zlomok má byť zo zadania celé číslo, teda menovateľ musí byť deliteľom čitateľa, a tak $9ab$ delí $9a^2 + 14b^2$. Musí teda platiť:

1. 9 delí $9a^2 + 14b^2$, avšak 9 delí $9a^2$, teda musí platiť aj to, že 9 delí $14b^2$. Čísla 9 a 14 sú nesúdeliteľné, čiže 9 musí deliť b^2. Z toho vyplýva, že b je násobkom čísla 3.
2. a delí $9a^2 + 14b^2$, avšak a delí $9a^2$, teda musí platiť, že a delí $14b^2$. Čísla a a b sú nesúdeliteľné, čiže aj a a b^2 sú nesúdeliteľné. Z toho ale vyplýva, že a delí číslo 14.
3. b delí $9a^2 + 14b^2$, avšak b delí $14b^2$, teda musí platiť, že b delí $9a^2$. Čísla b a a sú nesúdeliteľné, čiže aj b a a^2 sú nesúdeliteľné. Z toho vyplýva, že b delí číslo 9.

Z 1. a 3. podmienky vyplýva, že b musí byť 3 alebo 9. Z 2. podmienky pre a platí, že patrí do množiny $\{1, 2, 7, 14\}$. Ak $b = 9$, tak po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme

$$\frac{9a^2 + 14 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 9a} = \frac{a^2 + 14 \cdot 9}{9a},$$

z čoho dostaneme, že 9 delí a^2. Potom ale 3 delí a a 3 delí b, čo je spor s tým, že a a b sú nesúdeliteľné. Takže b musí byť rôzne od 9, čiže nám stačí overiť 4 možnosti, kde (a,b) sú dvojice (1,3), (2,3), (7,3) a (14,3). Dosadením sa ľahko presvedčíme, že tieto štyri dvojice čísel a a b vyhovujú zadaniu. Iné dvojice čísel a a b nie sú riešením, keďže sme ich vylúčili v 1. až 3. podmienke.
b) Čísla a a b môžu byť súdeliteľné.
Označme si ich najväčší spoločný deliteľ k ($k > 1$). Potom platí $a = k \cdot x$, $b = k \cdot y$, kde x a y sú nesúdeliteľné čísla. Dosaďme a a b:

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a} = \frac{k \cdot x}{k \cdot y} + \frac{14k \cdot y}{9k \cdot x} = \frac{x}{y} + \frac{14y}{9x},$$

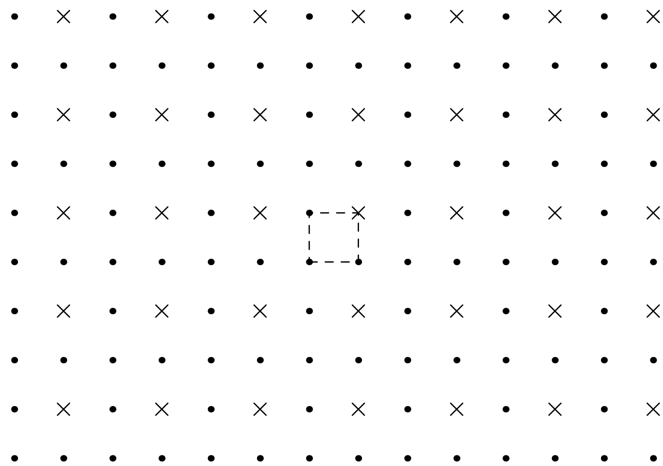
čím sme dostali úlohu, ktorú sme riešili v prípade a). Teda súdeliteľné a a b sú riešením práve vtedy, keď je riešením dvojica (x,y). Keďže k môže byť ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 1 a úloha po a) mala aspoň jedno riešenie, existuje nekonečne veľa súdeliteľných a a b, ktoré sú riešením. Budú to dvojice $(k,3k)$, $(2k,3k)$, $(7k,3k)$ a $(14k,3k)$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 1.

Komentár: Väčšina z vás nemala s touto úlohou žiaden problém, pomerne ľahko ste odhalili riešenia. Občas sa objavili menšie nepresnosti v argumentácii, za čo šli bodíky dole. Viacerí ste tvrdili, že ak a delí bc a a nedelí b, tak a delí c. K tomu však viete nájsť jednoduchý kontrapríklad, 6 delí $3 \cdot 2$ a 6 nedelí 3, ale 6 nedelí ani 2. Teda na to, aby to tvrdenie platilo, je nutný predpoklad, že a a b sú nesúdeliteľné. Ďalšou nepresnosťou bolo tvrdenie, že z toho, že a a b sú nesúdeliteľné, vyplýva, že a nedelí b. Opäť jednoduchý kontrapríklad: čísla 1 a 5 sú nesúdeliteľné, no 1 delí 5. Treba si uvedomiť, ako je definovaná nesúdeliteľnosť. Čísla a a b sú nesúdeliteľné, ak majú práve jedného kladného spoločného deliteľa (číslo 1).

3. Tri kobylky sedia v troch vrcholoch štvorca. Každú minútu jedna z nich preskočí inú kobylku a dopadne do bodu, ktorý je stredovo súmerný s bodom, v ktorom pôvodne stála skáčuca kobylka podľa bodu, v ktorom sedí preskakovaná kobylka. Môže sa niektorej z kobyliek podariť doskákať do štvrtého vrchola štvorca?

Opravoval: Marek Derňár **Počet riešiteľov: 49**

Riešenie:



Každý z nás keď uvidí podobné zadanie, tak určite ako prvé skúsi, či sa náhodou nedá doskákať do spomínaného štvrtého vrchola štvorca. Takže najprv si umiestnime kobylky do troch vrcholov nejakého štvorca (na obrázku je to štvorec vyznačený čiarkovane). Keďže asi nemáme k dispozícii naozajstné kobylky (respektíve naozajstné kobylky by sa asi nehýbali tak ako by sme chceli :-)), tak si kobylky znázornime čiernymi bodkami a vrchol, v ktorom nie je kobylka, krížikom.
Konečne teraz môžeme skúšať vymýšľať nejakú taktiku, ako by sa niektorá kobylka mohla dostať do spomínaného štvrtého vrchola štvorca.

Po chvíľke skúšania však už sami seba presvedčíme, že do toho vrcholu sa v skutočnosti dostať nedá. Máme teda túto hypotézu, ktorú však musíme ešte dokázať.

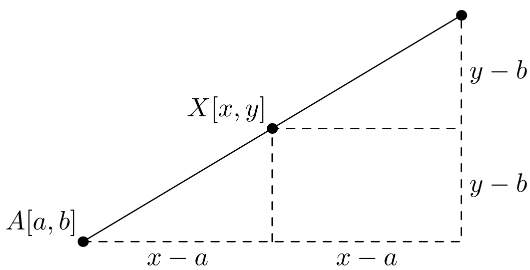
Pokiaľ sme si pri tom skúšaní poriadne všímali a zaznačovali body, do ktorých sa kobylky dostali, tak sme mohli zistiť, že sa môžu dostať do každého z bodov na obrázku vyznačených bodkami. Taktiež

sme si mohli všimnúť, že sa žiadna z nich nikdy nedostala do bodov na obrázku vyznačených krížikom (medzi ktorými je aj náš štvrtý vrchol štvorca).
Je dôležité poznamenať, že náš obrázok by nemal byť ohraničený, ale mal by vo všetkých smeroch rovnako pokračovať ďalej. Čiže v tomto riešení uvažujeme, že máme takúto „mriežku nekonečne veľkú“.
Pokiaľ by sme teda dokázali, že kobylky sa nikdy nedostanú do žiadneho bodu označeného krížikom, tak by sme mali úlohu vyriešenú. Na to nám však stačí ukázať, že po ľubovoľnom počte krokov sa kobylky budú nachádzať iba v bodoch označených bodkou.

Môžeme si všimnúť, že obrázok je pekne symetrický, čo by sme mohli využiť. Kobylky sa pohybujú pomocou stredovej súmernosti, čo nám však vzhľadom na symetriu obrázka hrá do karát. Prečo? Pretože náš obrázok je taktiež stredovo súmerný podľa ľubovoľného bodu označeného bodkou. (Skúste si premyslieť a odôvodniť, prečo to tak je.) Keďže je obrázok stredovo súmerný podľa ľubovoľného bodu označeného bodkou, tak ak by sa kobylky nachádzajú iba na bodoch označených bodkami a niektorá z nich preskočí cez inú, tak skočí do bodu opäť označeného bodkou.

Takže na začiatku sú všetky kobylky v bodoch označených bodkami. Pokiaľ niektorá kobylka preskočí inú, tak sa kobylky opäť ocitnú v bodoch označených bodkami. Po druhom preskoku sa opäť ocitnú v bodoch označených bodkami, atď. Čiže naozaj by sme už jednoduchou matematickou indukciou vedeli ukázať, že po ľubovoľnom počte krokov sa kobylky budú nachádzať v bodoch označených bodkami. Teda naozaj sa nikdy nedostanú do bodov označených krížikom, teda ani do štvrtého vrchola pôvodného štvorca.

<u>Iné riešenie:</u>
Pri prvom riešení sme využívali to, že sme si urobili nejaký obrázok a z neho vyčítali rôzne vlastnosti (stredová súmernosť podľa ľubovoľného bodu označeného bodkou). Teraz by sme mohli tento obrázok skúsiť presne matematicky popísať, čím by sa nám riešenie zjednodušilo.
Keďže kobylky skáču v rovine, tak by sme si mohli do nej zaviesť nejakú súradnicovú sústavu, čím by jednotlivé body boli jednoznačne reprezentované ich súradnicami. Zaveďme teda takú karteziánsku súradnicovú sústavu, že 1 jednotka je presne strana štvorca, na ktorého vrcholoch sú na začiatku kobylky, a kobylky nech sú v bodoch o súradniciach $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$. Otázka zo zadania teraz je, či sa môže niektorá kobylka dostať do bodu $[0, 0]$.



Poďme sa teraz pozrieť, čo sa deje, ak by kobylka A nachádzajúca sa v bode $[a, b]$ preskočila kobylku X nachádzajúcu sa v bode $[x, y]$ (čísla a, b, x a y sú ľubovoľné celé čísla). Zrejme by sa súradnice kobylky A zmenili o dvojnásobok rozdielu súradníc kobyliek B a A (veľmi pekne to vidno na obrázku). Takže kobylka A by nakoniec skončila v bode

$$[a + 2 \cdot (x - a), b + 2 \cdot (y - b)].$$

Keďže a, b, x a y boli celé čísla, tak aj

$$a + 2 \cdot (x - a) \qquad \text{a} \qquad b + 2 \cdot (y - b)$$

sú celé čísla. Navyše čísla $2 \cdot (x - a)$ a $2 \cdot (y - b)$ sú párne, čiže zmena oboch súradníc je o párne číslo. To však znamená, že ak bola nejaká súradnica párna, tak aj ostane párna a ak bola nepárna, tak aj ostane nepárna (inak povedané nemení sa parita súradníc, respektíve parita súradníc je invariant).
Na začiatku sú všetky kobylky v celočíselných súradniciach a každá z nich má aspoň jednu súradnicu nepárnu, ktorá pri preskakovaní ostane nepárna navždy. Z toho už vidíme, že žiadna z kobyliek sa

nemôže dostať do žiadneho bodu, ktorý má obe súradnice párne čísla, teda ani do bodu $[0, 0]$.

Komentár: Najčastejšou chybou v riešeniach bolo to, že ste urobili podobný obrázok ako pri prvom riešení, zdôvodnili, že do bodov vyznačených bodkou sa kobylky môžu dostať a prehlásili, že do ostatných to určite nejde. Z toho, že do nejakých bodov sa kobylky dostať vedia však ešte nevyplýva, že do iných sa dostať nemôžu. Taktiež chybou (ktorá vás mohla stáť stratu jedného bodu) bolo, ak ste nenapísali, prečo bod obrazu v stredovej súmernosti má súradnice $[a + 2 \cdot (x - a), b + 2 \cdot (y - b)]$.

4. Predstavme si štvorčekovú mriežku, ktorá má každý štvorček ofarbený buď čiernou, alebo bielou farbou. Hovoríme, že štvorček je *ohrozený*, ak má čiernu farbu, v riadku naľavo od neho sa nachádza nejaký biely štvorček a v stĺpci nad štvorčekom sa nachádza nejaký biely štvorček.
a) Koľko je rôznych mriežok 2×7, ktoré nemajú žiaden *ohrozený* štvorček?
b) Koľko je rôznych mriežok $2 \times n$ (n je ľubovoľné prirodzené číslo), ktoré nemajú žiaden *ohrozený* štvorček?

Opravovali: Maja Harčarufková a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 40**
Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že štvorec nie je ohrozený, ak platí aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

1. štvorec je biely
2. nad štvorcom nie je žiadny iný štvorec alebo iba čierne štvorce
3. vľavo od neho nie je nič alebo iba čierne štvorce

Na základe toho je zrejmé, že štvorce v hornom rade a v prvom stĺpci zľava nemôžu byť ohrozené. Ukážeme, ako možno nájsť všeobecný vzťah pre počet mriežok typu $2 \times n$ bez ohrozených štvorčekov. Riešenie bodu časti a) zo zadania potom dostaneme ihneď triviálnym dosadením do výsledného vzťahu $n = 7$. Ešte pre úplnosť dodajme, že budeme uvažovať mriežku s 2 riadkami a n stĺpcami (možno aj vymeniť riadky so stĺpcami a teda riešiť tú istú úlohu pre mriežku s n riadkami a 2 stĺpcami, riešenie úlohy ani výsledok by sa tým ale nezmenil).

Pre mriežku 2×1 máme celkovo 4 možnosti ako ju ofarbiť. Všetky tieto možnosti nebudú mať ohrozený štvorec, lebo v každom prípade je určite splnená 3. podmienka. Tento súčet si označíme ako P_1. Predstavme si mriežku $2 \times n$. Potom počet všetkých možností ako ofarbiť túto mriežku tak, aby nemala ohrozené štvorce označíme P_n. Pozrime sa teraz na to, čo sa stane, ak pridáme k tejto mriežke jeden stĺpec sprava. Dostaneme mriežku typu $2 \times (n + 1)$ a počet všetkých možností ako ofarbiť túto mriežku tak, aby nemala ohrozené štvorce, označíme P_{n+1}.

Pridaním stĺpca sprava všetky štvorce pôvodnej mriežky naďalej nebudú ohrozené, lebo sa nezmení ich farba, ani štvorec nad nimi, resp. naľavo od nich. Takže si musíme premyslieť iba ohrozenie štvorcov v stĺpci, ktorý pridávame. Vrchný štvorec stĺpca nemôže byť ohrozený vďaka 2. podmienke, teda stačí uvažovať spodný štvorec.
Ak je pridaný spodný štvorec biely, tak vďaka 1. podmienke nie je ohrozený.
Ak spodný štvorec je čierny a zároveň sa nad ním nachádza čierny štvorec, tak kvôli 2. podmienke nie je ohrozený.
V týchto troch prípadoch sa počet rôznych mriežok bez ohrozených štvorcov rovná P_n pre každé z nich, čo je spolu $3 \cdot P_n$ rôznych možností.
Ak je spodný štvorec čierny a nad ním je biely štvorec tak, aby nevznikol ohrozený štvorec, všetky štvorce spodného riadku pôvodnej mriežky musia byť čierne. V tomto prípade bude splnená aspoň 3.

podmienka. Vrchný riadok môže byť v tomto prípade ofarbený ľubovoľným spôsobom. Počet možností ako zafarbiť n horných štvorcov je 2^n. Z toho dostávame, že počet mriežok typu $2 \times (n+1)$ bez ohrozených štvorcov spĺňa vzťah

$$P_{n+1} = 3 \cdot P_n + 2^n.$$

Tento vzorec ešte upravíme tak, aby bolo P_n vyjadrené iba v závislosti od n. Postupne dostávame:

$$\begin{aligned}
P_n &= 3 \cdot P_{n-1} + 2^{n-1} = 3 \cdot (3 \cdot P_{n-2} + 2^{n-2}) + 2^{n-1} = \dots \\
&= 3 \cdot (3 \cdot (\dots (3 \cdot 4 + 2) + 2^2) + \dots + 2^{n-1} = \\
&= 3^{n-1} \cdot 4 + 3^{n-2} \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} = \\
&= 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Môžeme si teraz všimnúť podobnosť s dobre známym vzorcom

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + b^{n-1})$$

a jeho použitím vieme náš výsledok upraviť do konečnej podoby:

$$P_n = \frac{3^n + (3^n - 2^n)}{3-2} = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

<u>Iné riešenie:</u>

(podľa Mariána Horňáka) Rozoberme dve možnosti:

a) Nech v spodnom riadku sa nenachádza žiaden biely štvorec. Potom vieme vrchný riadok ofarbiť ľubovoľným spôsobom a nedostaneme v takejto mriežke žiaden ohrozený štvorec. Dokopy máme 2^n možností pre tento prípad.

b) Nech sa v spodnom riadku nachádza aspoň jedno biele políčko a nech prvé biele políčko zľava sa nachádza v i-tom stĺpci. V prvých $i-1$ stĺpcoch sa nachádzajú iba čierne štvorce a teda žiaden z nich nemôže byť ohrozený (vďaka 3. podmienke). Štvorce v hornom riadku v prvých i stĺpcoch môžeme teda ofarbiť ľubovoľne bez toho, aby sme dostali ohrozený štvorec. Týchto možností je celkovo 2^i.
Ak by sa vo zvyšných $n-i$ stĺpcoch nachádzal stĺpec tvaru B/Č (biely štvorec nad čiernym), tak spodný štvorec by bol určite ohrozený. Preto sa v posledných $n-i$ stĺpcoch môže nachádzať len stĺpec typu Č/Č, Č/B alebo B/B. V každom z týchto trochu prípadov nebude spodné políčko ohrozené. Preto zvyšok mriežky vieme ofarbiť celkovo 3^{n-i} spôsobmi. Celú tabuľku potom

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot 3^{n-i}$$

možností.

Celkovo teda spoločne s prípadom po a) máme

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot 3^{n-i} + 2^n$$

možností. Ľahko sa dá podobne ako v prvom riešení ukázať, že tento súčet je taktiež rovný $2 \cdot 3^n - 2^n$. Špeciálne pre mriežku 2×7 dostávame $2 \cdot 3^7 - 2^7 = 4246$ možností.

Komentár: Medzi vašimi riešeniami sa vyskytlo mnoho zaujímavých a pekných úvah. Najkrajšie riešenia však mali Marián Horňák a Mojmír Madiš.

Riešenia 2. série úloh zimného semestra 34. ročníka

1. Janko s Marienkou sa hrajú s 11 kamienkami. Na začiatku hry sú kamienky na jednej kôpke. Marienka začína (keďže Janko je džentlmen). Na striedačku berú z kôpky 1, 2, 3 alebo 4 kamienky na svoju kôpku, až kým nie je kôpka úplne rozdelená. Vyhráva ten, kto má po rozdelení všetkých kamienkov na svojej kôpke párny počet kamienkov. Koľko kamienkov má zobrať na začiatku Marienka, aby zaručene vyhrala? Koľko ich má zobrať, ak je na začiatku v kôpke 33 kamienkov? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť.

Opravovali: Maja Harčarufková a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 41**

Riešenie:

Na to, či môžeme vyhrať, sa budeme dívať z pohľadu hráča, ktorý je na ťahu. Do úvahy však budeme brať iba paritu (t.j. párnosť alebo nepárnosť) množstva kamienkov, ktoré zobral pri svojom ťahu. Takto to budeme robiť preto, lebo na priebeh tejto hry vplýva iba parita počtu kamienkov (u hráčov, resp. na kôpke). Budeme uvažovať, že na začiatku hry je na kôpke nepárny počet kamienkov. Takže až sa hra skončí, tak práve jeden hráč bude mať párny počet kamienkov, čiže bude víťazom danej hry.

Ak je na kôpke 0 kamienkov, tak už nie je čo zobrať a hra sa skončí. Ak som na ťahu a mám párny počet kamienkov, tak som vyhral, ale ak mám nepárny počet, tak som prehral. Takže 0 môžem označiť ako prehrávajúcu pozíciu pre hráča, ktorý má nepárny počet kamienkov.

Ak je na kôpke 1 kamienok a ja som na ťahu, tak ho musím zobrať. Ak mám nepárny počet kamienkov, tak pridaním jedného budem mať párny počet, teda vyhrám. Ale ak mám párny počet, tak naopak prehrám. Túto pozíciu si označíme ako prehrávajúcu pre hráča, ktorý má párny počet kamienkov.

Ak sú na kôpke 2, 3 alebo 4 kamienky, tak viem vždy zobrať toľko kamienkov, aby môj súper prehral. Ak má súper párny počet, tak zoberiem toľko, aby ostal 1 kamienok. Pokiaľ by ich mal nepárny počet, tak zoberiem toľko kamienkov, aby neostal ani jeden, čím súpera dostanem do prehrávajúcej pozície. Súper prehrá, teda víťazom som ja (ako hráč na ťahu). Tieto pozície sú preto víťazné bez ohľadu na to, či mám párny alebo nepárny počet kamienkov.

Ak som na ťahu, keď je na kôpke 5 kamienkov, tak viem zobrať 1 až 4 kamienky a tým dostať súpera na jednu z pozícií 1 až 4 (počet kamienkov na kope). Aby som vyhral musím ho dostať na prehrávajúcu pozíciu, ale 1 je jediná prehrávajúca pozícia spomedzi nich. Aj to iba ak má súper párny počet kamienkov. Pokiaľ by mal nepárny počet kamienkov, tak ho neviem dostať na prehrávajúcu pozíciu, čiže ide o výhernú pozíciu pre súpera. Táto pozícia je teda prehrávajúca pre mňa (hráča na ťahu). Keďže je ale v hre dokopy nepárny počet zápaliek, tak nutne aj ja mám nepárny počet zápaliek. Takže táto pozícia je prehrávajúca pre hráča s nepárnym počtom kamienkov.

Ak je na kôpke 6 kamienkov, tak po mojom ťahu zostane na kôpke 2 až 5 kamienkov. Ak má súper nepárny počet kamienkov, tak ho posuniem na pozíciu 5. Ale ak má párny počet kamienkov, tak ho neviem dostať na prehrávajúcu pozíciu. Na kôpke je totiž párny počet kamienkov a ja teda mám nepárny počet kamienkov. Pozícia je prehrávajúca pre hráča s nepárnym počtom kamienkov.

Ak je na kôpke 7 kamienkov, tak po mojom ťahu ostane na kôpke 3 až 5 kamienkov. Ak má súper párny počet kamienkov, tak ho neviem dostať na prehrávajúcu pozíciu. Pozícia je prehrávajúca pre hráča s párnym počtom kamienkov.

Teraz si všimnime, že pozície 6 a 7 sú rovnaké ako pozície 0 a 1. Zhodujú sa v parite kamienkov na kôpke aj v tom kto vyhrá. Z toho vyplýva, že argumentácia pre pozície 8, 9 a 10 je rovnaká ako pre pozície 2, 3, 4 a tak ďalej. Vznikol teda vzor, ktorý má dĺžku 6 a cyklicky sa opakuje. Pozície, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení 6, sa zhodujú v parite a aj v tom, kto vyhrá a dajú sa jednoznačne určiť podľa vzoru.

Takže ak je na začiatku hry na kôpke 11 kamienkov, tak by Marienka mala zobrať 4 kamienky, pretože ona aj Janko majú na začiatku 0 kamienkov, čiže párny počet. Zvyšok po delení 11 je 5, čo je vyhrávajúca pozícia pre hráča s párnym počtom kamienkov. Ak Marienka vezme 4 kamienky, tak tým dostane Janka na prehrávajúcu pozíciu.

Ak je na začiatku hry na kôpke 33 kamienkov, tak Marienka musí zobrať práve 2 kamienky aby vyhrala, pretože zvyšok po delení 33 šiestimi je 3 a 3 je vyhrávajúca pozícia pre hráča s akýmkoľvek počtom kamienkov. Totižto je to akoby boli na kôpke iba 3 kamienky, o čom sme už ukázali, že treba v tomto prípade zobrať 2 kamienky, aby súperovi, ktorý má párny počet, ostal posledný kamienok.

2. Pre aké hodnoty parametra b majú rovnice

$$2009x^2 + bx + 9002 = 0$$
$$9002x^2 + bx + 2009 = 0$$

spoločný reálny koreň?

Opravovali: Veronika Kopčová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 42**

<u>**Riešenie:**</u>

V zadaní máme dve kvadratické rovnice s neznámou x a parametrom b. Taktiež vieme, že majú jeden spoločný koreň, ktorý si označíme ako x_1. Potom platí:

$$2009x_1^2 + bx_1 + 9002 = 0$$
$$9002x_1^2 + bx_1 + 2009 = 0$$

Dostali sme teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Túto sústavu už môžeme riešiť nám dobre známymi metódami. Najjednoduchší spôsob je odčítať prvú rovnicu od druhej, čím dostávame:

$$6993x_1^2 - 6993 = 0$$
$$x_1^2 - 1 = 0$$
$$(x_1 + 1)(x_1 + 1) = 0$$
$$x_1 = 1 \quad \text{alebo} \quad x_1 = -1$$

Teda spoločný koreň rovníc zo zadania je buď 1 alebo -1. My však potrebujeme zistiť všetky možné hodnoty parametra b. Stačí teda do rovníc dosadiť spoločný koreň x_1 a dopočítať parameter b.

1. Ak $x_1 = 1$, tak dosadíme do oboch rovníc koreň $x_1 = 1$ a dostávame:

$$2009 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 9002 = 0$$
$$9002 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2009 = 0$$

Z oboch rovníc vyjadríme neznámu b, a teda $b = -11011$.

2. Ak $x_1 = -1$, tak dosadíme do oboch rovníc koreň $x_1 = 1$ a dostávame:

$$2009 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 9002 = 0$$
$$9002 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2009 = 0$$

Z oboch rovníc vyjadríme neznámu b, a teda $b = 11011$.

Dokázali sme, že ak majú rovnice spoločný reálny koreň, tak $b = 11011$ alebo $b = -11011$. Pri našom riešení sme však odčítavali dve rovnice, čo je dôsledková úprava. Preto by sme mali ešte urobiť skúšku správnosti, či pre nájdené hodnoty parametra b majú naozaj rovnice spoločný reálny koreň. Na druhej strane možné hodnoty pre b sme dostali takým spôsobom, že sme do pôvodných rovníc dosadili hodnoty ich spoločného koreňa. Takže pre $b = 11011$ aj pre $b = -11011$ majú určite rovnice spoločný reálny koreň (ten ktorý sme tam dosadzovali), a teda zadaniu naozaj vyhovujú.

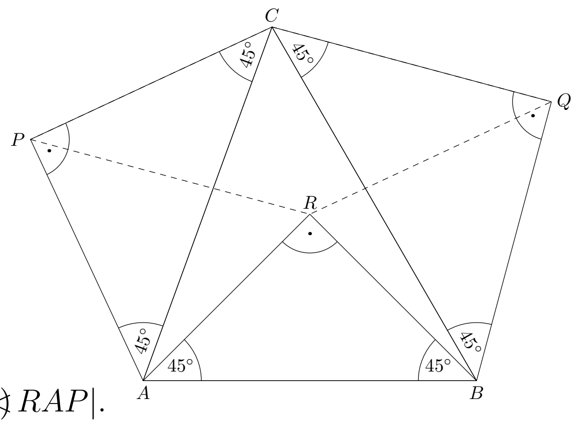
Komentár: Najčastejšou chybou bolo, že ste sa okamžite pustili do riešenia sústavy rovníc. Sústavu rovníc však môžeme riešiť iba vtedy, ak neznáma je pre obe rovnice spoločná (rovnaká). V tomto prípade ju tak môžeme riešiť, iba ak si za tú neznámu zoberieme spoločný koreň zadaných kvadratických rovníc.
Taktiež mnoho riešení bolo „pomocou diskriminantu", čiže vyjadrením si všetkých koreňov zadaných kvadratických rovníc. Takýto typ riešenia však bol o dosť zložitejší a zdĺhavejší, a tak sa takmer pri každom z nich našla nejaká chyba. Najčastejšie ste urobili nejaké dôsledkové úpravy, a potom ste na konci zabudli overiť riešenia skúškou správnosti (pri dôsledkových úpravách je skúška správnosti potrebná).

3. Majme ostrouhlý trojuholník ABC s vnútornými uhlami väčšími ako 45°. Nad stranami CA a CB tohto trojuholníka ako základňami zvonku zostrojíme rovnoramenné pravouhlé trojuholníky CAP a CBQ. Vnútri trojuholníka ABC zostrojíme bod R tak, aby ARB bol rovnoramenný pravouhlý trojuholník so základňou AB. Dokážte, že $CQRP$ je rovnobežník.

Opravovali: Miška Vrbjarová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 28**

Riešenie:

Ako prvé pri riešení geometrickej úlohy si načrtneme pekný obrázok. Pokiaľ chceme o nejakom štvoruholníku ukázať, že je to rovnobežník, tak máme viacero možností. Jedna z nich je napríklad dokázať, že dĺžky jeho protiľahlých strán sú rovnaké.
Podľa zadania sú trojuholníky ACP, ABR a CBQ rovnoramenné a pravouhlé, teda uhly pri ich základniach budú mať veľkosť 45°. Takže $|\sphericalangle RAB| = |\sphericalangle CAP| = 45°$, ale potom z obrázka jasne vidíme



$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle RAB| + |\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle RAP|.$$

Úplne analogicky z $|\sphericalangle RBA| = |\sphericalangle CBQ| = 45°$ dostaneme

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle RBA| + |\sphericalangle RBC| = |\sphericalangle CBQ| + |\sphericalangle RBC| = |\sphericalangle RBQ|.$$

Pozrime sa teraz ešte na to, čo môžeme vyťažiť z faktu, že tu máme niekoľko rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov (už spomínané trojuholníky ACP, ABR a CBQ). Keďže tieto trojuholníky majú rovnaké veľkosti vnútorných uhlov (a to 45°, 45° a 90°), tak sú navzájom podobné (podľa vety uu), čiže $\triangle ACP \sim \triangle ABR \sim \triangle CBQ$. Pomery ich odpovedajúcich si strán musia byť rovnaké, takže platí:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BR|}{|CP|} = \frac{|RA|}{|PA|} \quad \text{a} \quad \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BR|}{|BQ|} = \frac{|RA|}{|QC|}$$

Dokázali sme teda, že platí

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle RAP| \quad \text{a} \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|RA|}{|PA|},$$

čiže podľa vety sus o podobnosti trojuholníkov sú trojuholníky ABC a ARP podobné (symbolicky $\triangle ABC \sim \triangle ARP$). Taktiež už máme ukázané

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle RBQ| \quad \text{a} \quad \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BR|}{|BQ|},$$

teda opäť podľa vety sus sú aj trojuholníky ABC a RBQ podobné (symbolicky $\triangle ABC \sim \triangle RBQ$). Vieme teda, že trojuholník ABC je podobný trojuholníkom ARP aj RBQ, čiže tieto tri trojuholníky majú rovnaké vnútorné uhly, takže sú podobné aj trojuholníky ARP a RBQ (symbolicky $\triangle ARP \sim \triangle RBQ$). Keďže $|AR| = |RB|$, tak tieto dva trojuholníky potom musia byť dokonca zhodné (symbolicky $\triangle ARP \cong \triangle RBQ$). Z ich zhodnosti potom dostávame

$$|RP| = |BQ| = |QC| \quad \text{a} \quad |RQ| = |AP| = |PC|.$$

Tým pádom sme dokázali, že protiľahlé strany v štvoruholníku $CQRP$ sú rovnako dlhé, teda je to rovnobežník.
V celom tomto riešení sme však vychádzali z nášho obrázka. Treba sa preto zamyslieť, či náš obrázok je naozaj „dobre nakreslený“ (čiže či je korektný vzhľadom na zadanie úlohy) a či nemôže nastať nejaký špeciálny prípad. Keďže trojuholník ABC je ostrouhlý a má všetky vnútorné uhly väčšie ako $45°$, tak naozaj bod R leží vo vnútri trojuholníka. Tým pádom máme naozaj obrázok nakreslený správne a zhodnosť spomínaných strán musí platiť. Ešte by sme sa mali aj zamyslieť, či naozaj nemôže nastať nejaký špeciálny prípad. Jediným špeciálnym prípadom by bolo, ak by body C, Q, R a P ležali na jednej priamke. Potom by však

$$180° = |\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| = 45° + |\sphericalangle ACB| + 45° = 90° + |\sphericalangle ACB|,$$

čiže $|\sphericalangle ACB| = 90°$. To je však spor s tým, že trojuholník ABC je ostrouhlý.
Teda žiadny špeciálny prípad nastať nemôže, čiže $CQRP$ je naozaj rovnobežník.

Komentár: Úloha nebola zložitá a veľmi veľa z vás prišlo na správne riešenie. Napriek tomu má plný počet bodov málokto. Najčastejšie ste body stratili za to, keď ste zo zhodnosti protiľahlých strán (alebo uhlov) usúdili, že to musí byť rovnobežník. To by však vo všeobecnosti neplatilo, keďže by to ešte vôbec nemusel byť štvoruholník. Preto by ste mali aspoň jednou vetou spomenúť, že to štvoruholník naozaj je.

4. Rovnica $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ má tri reálne korene a, b a c, pričom $a < b < c$.
a) Určte hodnotu $a^5 + b^5 + c^5$.
b) Ukážte, že číslo c^{2004} je bližšie k svojmu najbližšiemu celému číslu, ako číslo c^{2003} k svojmu najbližšiemu celému číslu.

Opravovali: Jakub Sedlák a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 17**
Riešenie:

Je známe, že každá kubická rovnica má práve tri korene. Vo všeobecnosti môže nastať situácia, že dva z týchto koreňov sú komplexné čísla. To ale nie je prípad našej rovnice zo zadania. Táto rovnica má práve tri reálne korene a tento fakt v riešení využijeme.
V časti a) je úlohou nájsť hodnotu výrazu $a^5 + b^5 + c^5$. Ak by sme vedeli nájsť hodnoty koreňov a, b, c nebol by žiaden problém vyčísliť tento výraz. Napriek tomu, že v tomto príklade je možné určiť tieto korene len približne, je možné určiť hodnotu hľadaného výrazu úplne presne! Niektorí z vás sa pokúsili určiť hodnoty koreňov a, b, c pomocou numerických metód. Musíme podotknúť, že v takomto prípade je nutné uviesť aj názov spomínanej metódy, aby bolo možné overiť váš výpočet. V takomto prípade ale aj tak vždy dospejeme len k približne správnemu určeniu hodnoty $a^5 + b^5 + c^5$,

preto za takýto postup nie je možné získať plný počet bodov.
Ako ale dospieť k správnemu vyčísleniu daného výrazu, ak nepoznáme hodnoty a, b, c? Kľúčovým sa javí použite Vietových vzťahov. Poďme sa teda pozrieť na to, čo nám hovoria. Vietove vzťahy vyplývajú z porovnania daného polynómu a polynómu vzniknutého roznásobením zátvoriek v tvare súčinu koreňových činiteľov danej polynomickej funkcie. Pre náš polynóm preto máme

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + (-a - b - c)x^2 + (ab + bc + ab)x + (-abc),$$

z čoho porovnaním členov pri rovnakých mocninách x plynie

$$a + b + c = 6, \quad ab + ac + bc = 5 \quad \text{a} \quad abc = 1.$$

Toto sú jediné výrazy, ktorých hodnotu poznáme a využijeme ich k nájdeniu hodnoty výrazu $a^5 + b^5 + c^5$. K tejto hodnote sa dá dopracovať viacerými možnosťami. My budeme postupovať nasledovne: Definujme si postupnosť $s_n = a^n + b^n + c^n$ a určíme pre ňu rekurentný vzťah (to znamená vzťah pomocou ktorého budeme vedieť určiť každý ďalší člen postupnosti na základe znalosti predošlých členov). Je možné si všimnúť, že s_n sa dá postupne zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} a^n + b^n + c^n &= (a+b+c)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - (ab^{n-1} + ac^{n-1} + ba^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1} + cb^{n-1}) = \\ &= (a+b+c)s_{n-1} - ab(a^{n-2} + b^{n-2}) - bc(b^{n-2} + c^{n-2}) - ca(c^{n-2} + a^{n-2}) = \\ &= (a+b+c)s_{n-1} - abs_{n-2} - bcs_{n-2} - acs_{n-2} + abc^{n-2} + bca^{n-2} + acb^{n-2} = \\ &= (a+b+c)s_{n-1} - (ab+bc+ca)s_{n-2} + abc(c^{n-3} + a^{n-3} + b^{n-3}) = \\ &= (a+b+c)s_{n-1} - (ab+bc+ca)s_{n-2} + (abc)s_{n-3} \quad \text{(dobre si rozmyslite jednotlivé úpravy)} \end{aligned}$$

Dostávame teda výsledný vzťah

$$s_n = (a + b + c)s_{n-1} - (ab + ac + bc)s_{n-2} + (abc)s_{n-3}.$$

Keďže hodnoty výrazov v zátvorkách poznáme, rekurentný vzťah pre s_n vieme zapísať v tvare

$$s_n = 6s_{n-1} - 5s_{n-2} + s_{n-3}.$$

Ak teda budeme poznať prvé 3 členy postupnosti $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, budeme vedieť určiť každý jej ďalší člen. Evidentne ale $s_0 = 3$, $s_1 = 6$ (z Vietových vzťahov) a s_2 si vieme dopočítať zo vzťahu

$$36 = 6^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 10.$$

Teda $s_2 = 26$. Teraz si už jednoducho dopočítame ďalšie členy postupnosti s_n. Postupne máme $s_3 = 129$, $s_4 = 650$ a $s_5 = 3281$, čo bolo potrebné vypočítať. Za túto časť ste mohli získať celkovo 4 body.

Predtým, ako začneme riešiť časť b), si všimnime jednu dôležitú skutočnosť. Všetky členy $s_0, s_1, \ldots s_5$ sú celé čísla. Je to náhoda alebo je každý člen tejto postupnosti celé číslo? V rekurentnom vzťahu pre s_n vystupujú ako koeficienty pri s_{n-2}, s_{n-1} a s_{n-3} iba celé čísla. Keďže aj prvé tri členy postupnosti s_n sú celé čísla, je zrejmé, že všetky nasledujúce členy budú taktiež celé čísla. Preto vieme povedať, že

$$a^{2003} + b^{2003} + c^{2003} = s_{2003} \quad \text{a aj} \quad a^{2004} + b^{2004} + c^{2004} = s_{2004}$$

sú určite celé čísla.
Pokúsme sa teraz zistiť niečo o koreňoch danej rovnice. Pozrime sa na danú rovnicu ako na polynomickú funkciu. Označme si ju f, teda $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$. Korene a, b, c sú nulovými bodmi tejto funkcie. Skúsme odhadnúť ich hodnoty a uvidíme, čo z toho dostaneme. Danú funkciu si prepíšeme do tvaru $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = x(x - 1)(x - 5) - 1$. Z tohto zápisu vidíme, že v bodoch 0, 1 a 5

je hodnota funkcie rovná -1. Keďže $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, ľahko môžeme vidieť, že korene a, $b \in (0, 1)$. Taktiež môžeme s istotou tvrdiť, že $c \in (5, \infty)$, pretože s rastúcou hodnotou x sa hodnota $f(x)$ neustále zväčšuje, čiže v niektorom bode väčšom ako 5 graf funkcie f určite pretne os x. Tento bod bude koreňom c (zo zadania vieme, že korene danej rovnice sú podľa veľkostí zoradené v poradí $a < b < c$). Odhadnime horné ohraničenie pre a a b. Za týmto účelom vypočítajme hodnoty funkcie $f(x)$ pre niektoré vybrané hodnoty $x \in (0, 1)$. Dostávame:

$$\begin{aligned} f(0.3) &= -0.013 < 0 \\ f(0.4) &= 0.104 > 0 \\ f(0.5) &= 0.125 > 0 \\ f(0.6) &= 0.056 > 0 \\ f(0.7) &= -0.097 < 0. \end{aligned}$$

Na základe toho môžeme tvrdiť, že $0.3 < a < 0.4 < 0.6 < b < 0.7$, čiže $0 < a < b < 0.7$. Keďže a aj b sú kladné čísla, tak z vlastností mocninovej funkcie vyplýva, že $0 < a^{2003} < b^{2003} < 0.7^{2003}$. Navyše platí, že $0,7^{2003} < \frac{1}{4}$ (ľahko vidieť z toho, že už $0.7^2 = 0.49 < \frac{1}{2}$, teda už $0.7^4 < \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$). Preto určite

$$a^{2003} + b^{2003} < \frac{1}{2}.$$

Keďže sme ukázali, že s_n je celé číslo pre každé n a $a^{2003} + b^{2003} < \frac{1}{2}$, najbližšie celé číslo k c^{2003} je s_{2003} a je od neho vzdialené o hodnotu $a^{2003} + b^{2003}$. Z vlastností exponenciálnej funkcie taktiež vyplýva, že pre všetky a, $b \in (0, 1)$ je $a^{2004} + b^{2004} < a^{2003} + b^{2003}$. Podobne platí, že najbližšie celé číslo k c^{2004} je s_{2004} a je od neho vzdialené o hodnotu $a^{2004} + b^{2004}$. Pretože je $a^{2004} + b^{2004} < a^{2003} + b^{2003}$, číslo c^{2004} je k svojmu najbližšiemu celému číslu bližšie ako číslo c_{2003} k svojmu najbližšiemu celému číslu, čo bolo potrebné dokázať.

Konečné poradie Zimného semestra 34. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Martin Vodička	Kvinta	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	8	9	-1	89
2.	Klára Ficková	2. A	GPoštKE	8	9	9	4	9	9	8	4	0	78
3.	Róbert Tóth	Oktáva	GAlejKE	7	9	9	9	4	9	8	9	1	75
4.	Marián Horňák	2. B	GPároNR	8	6	9	9	9	8	8	-	3	74
5.	Dávid Hvizdoš	2. A	GPoštKE	5	8	9	9	7	8	8	-	0	71
6.	Jana Baranová	Oktáva	GAlejKE	9	9	9	3	7	9	9	5	1	68
7.	Michal Kopf	2. A	GSlezCZ	7	8	9	1	-	8	8	8	0	65
	Radovan Hnatič	2. A	GPoštKE	8	6	8	-	6	9	8	4	-1	65
9.	Viktor Szabados	3. B	GGrösBA	9	9	9	-	8	8	6	-	-1	64
	Martin Bachratý	4. B	GOkruŽA	8	6	9	9	4	9	7	3	1	64
11.	Monika Zlaczka	3. A	GPoštKE	7	7	9	1	7	8	9	1	0	63
12.	Matúš Stehlík	Septima	GAlejKE	9	9	9	9	9	8	-	-	0	62
13.	Miroslav Stankovič	9. A	ZKro4KE	8	-	7	9	2	7	9	-	0	60
	Daniela Harčarufková	2. A	GPoštKE	9	8	4	7	9	7	1	-	0	60
	Denisa Múthová	3. A	GRužiŽA	8	8	7	-	8	8	7	-	0	60
16.	Petra Zibrínová	3. D	GMudrPO	8	7	3	9	4	8	8	1	0	59
17.	Tomáš Babej	3. A	GPoštKE	9	7	6	2	4	8	8	4	0	58
18.	Kristína Faguľová	2. A	GPoštKE	8	8	9	1	5	8	3	-	0	55
19.	Ján Jursa	9. A	ZKro4KE	8	9	8	-	4	8	-	-	0	54
	Dominik Csiba	Septima A	GTeplBA	9	7	9	5	9	8	-	-	0	54
	Peter Milošovič	3. A	GPoštKE	9	8	6	1	4	8	8	-	0	54
22.	Miroslava Vašková	3. D	GMudrPO	6	5	2	9	5	8	7	-	0	52
23.	Matej Večerík	Septima A	GTeplBA	4	8	7	-	7	7	7	-	0	51
24.	Barbora Marenčáková	Sexta	GKukuPP	7	8	4	0	7	8	-	-	0	48
25.	Zuzana Baxová	2. E	G1májTN	6	5	7	-	4	7	6	-	0	47
26.	Ivana Gašková	Sexta	GAlejKE	9	9	-	1	4	9	-	1	0	46
27.	Jakub Šafin	1. G	GMasaMI	-	2	8	1	6	3	7	2	0	44
28.	Mojmír Majdiš	4. B	GHvieDK	9	9	8	9	-	-	-	-	1	43
	Ivana Lauková	Oktáva A	GLettMT	9	9	4	0	9	8	4	-	0	43
30.	Jakub Rybák	3. C	GKukuPP	8	9	4	0	9	7	-	-	0	41
	Daniel Till	2. A	GPoštKE	7	8	4	-	4	7	-	-	0	41
32.	Ladislav Bačo	4. A	GPoštKE	7	9	8	9	-	-	-	-	0	40
33.	Zuzana Cocuľová	4. A	GPoštKE	8	7	2	1	4	8	8	-	0	39
34.	Vladimír Macko	1. A	GHronZV	4	-	9	-	2	7	-	-	0	38
35.	Ladislav Hovan	3. A	GExnáKE	6	7	8	-	2	8	-	-	0	37
36.	Lucia Magurová	1. A	GPoštKE	7	3	1	1	3	6	2	0	0	36
37.	Miloslav Homer	2. A	GPoštKE	9	6	2	1	3	5	-	-	0	35
	Filip Stripaj	9. A	ZKro4KE	4	4	2	-	4	8	-	1	0	35
39.	František Lami	1. A	GPoštKE	9	9	4	3	-	-	-	-	0	34
40.	Pavol Koprda	Sexta A	GHvieTT	5	9	-	1	2	7	-	-	0	31
41.	Jakub Kocák	3. D	GKomeHÉ	8	6	9	1	-	-	-	-	0	30
42.	Tuan Anh Le	Septima	GGrösBA	9	6	8	-	-	-	-	-	0	29
43.	Monika Vaľková	Oktáva	GAlejKE	8	9	9	-	-	-	-	-	0	26

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
44.	Martin Homa	1. A	GPoštKE	9	1	4	2	-	-	-	-	0	25
45.	Adam Midlik	8. A	GMudrPO	7	9	8	-	-	-	-	-	0	24
46.	Veronika Melošová	Kvinta	GŠtúrBR	2	3	2	1	1	4	1	0	0	21
47.	Jozef Lami	2. A	GPoštKE	8	3	-	3	-	-	-	-	0	17
48.	Michal Anderle	Sexta	GHaliLC	8	4	-	-	-	-	-	-	0	16
49.	Dávid Ľupták	1. F	GTajoBB	3	1	2	1	0	6	0	0	0	14
50.	Viktor Popovič	Oktáva A	GMudrPO	8	-	4	-	-	-	-	-	0	12
	Daniela Pellerová	Kvinta A	GGrösBA	-	-	-	-	4	8	-	-	0	12
52.	Dáša Krasnayová	Septima	GAlejKE	8	-	-	3	-	-	-	-	0	11
	Jakub Kireš	2. A	GPoštKE	0	2	-	1	-	7	-	0	0	11
54.	Róbert Solárik	1. A	GPoštKE	5	-	-	-	-	-	-	-	0	10
	Ivana Sopatová	1. A	GPoštKE	-	-	-	-	0	5	-	-	0	10
56.	Kamila Štyráková	4. B	GHvieDK	9	-	-	-	-	-	-	-	0	9
57.	Jakub Šalagovič	Sexta	GAlejKE	8	-	-	-	-	-	-	-	0	8
	Veronika Koľveková	2. A	GPoštKE	6	1	-	-	-	-	-	-	0	8
59.	Jana Kížiková	1. A	GPoštKE	1	1	2	1	-	-	-	-	0	7
60.	Ján Dudič	1. A	GPoštKE	-	-	2	0	0	-	1	-	0	6
61.	Peter Jurčo	1. A	GPoštKE	1	-	1	1	-	-	-	-	0	4

Pohár konštruktérov Zimného semestra 34. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	23	827
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	8	385
3.	ZKro4KE	Základná škola Krosnianska 4 040 22 Košice	3	149
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	147
5.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	105
	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	2	105
7.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	2	89
8.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	74
9.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 NULL Opava	1	65
10.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	1	64
11.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	60
12.	GHvieDK	Gymnázium P.O.H. Hviezdoslavovo námestie 18 026 24 Dolný Kubín	2	52
13.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	47
14.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	44
15.	GLettMT	Gymnázium J. Lettricha 036 01 Martin	1	43
16.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	38
17.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	37
18.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	31
19.	GKomeHÉ	Gymnáz. gen. L. Svobodu Komenského 4 066 51 Humenné	1	30
20.	GŠtúrBR	Gymnázium Štúrova 13 977 01 Brezno	1	21
21.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	1	16
22.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	1	14

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • December 2009 • Zimný semester 34. ročníka (2009/2010)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`