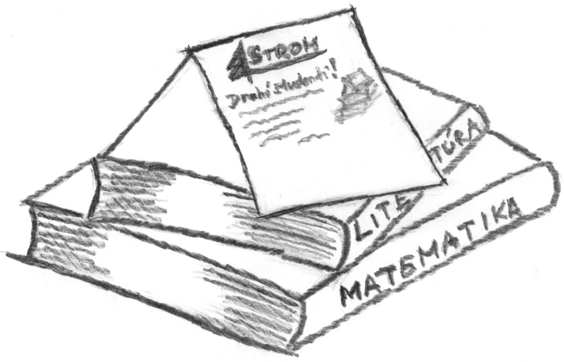
Drahí študenti!

Brány škôl sa opäť otvárajú a ponúkajú vám svet (ne)obmedzených možností. Napríklad môžete stratiť jediné píšuce pero, zabudnúť, v ktorej učebni máte hodinu alebo dostať vynadané za prezúvky, lebo vyzerajú ako botasky. Bez ohľadu na to, v ktorom ste ročníku, vám niekto pripomenie, že maturita je už naozaj blízko. Skrátka a dobre, bezpochyby sa je na čo tešiť. Našťastie, na spestrenie nudného výkladu či nevyužiteľnej diery v rozvrhu sa núkajú dve pozoruhodné série matematických úloh, ktorými si môžete krátiť chvíľky. A nezabudnite do zimy v škole vysvetliť, že ten týždeň vás isto oželejú.



Navždy vaši **STROM**isti

Košický Matboj

Už 17. ročník tejto súťaže sa uskutoční 27. októbra 2017 v Košiciach. Inštrukcie k prihlasovaniu na túto súťaž budú rozposlané na školy v druhej polovici septembra. Ak ste o súťaži doposiaľ nepočuli a radi by ste sa dozvedeli viac, zavítajte na `https://seminar.strom.sk/sk/matboj/`, kde nájdete zadania a riešenia starších ročníkov, respektíve do galérie s fotografiami z minulých Matbojov.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia - vzdelávanie pre 21. storočie (`https://itakademia.sk`). Pred tým ako odošleš prvé príklady (poštou, alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli `https://registracia.itakademia.sk`. V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredenia v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na `sutaze@itakademia.sk`.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke `http://seminar.strom.sk`. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz `Aktualizovať profil` v sekcii `Správa účtu`. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke `seminar.strom.sk`. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo `Odovzdať` pri konkrétnom príklade v sekcii `Príklady`. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte riešenia na e-mailovú adresu `riesenia@strom.sk` vo formáte PDF.

Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail `strom@strom.sk` alebo osobne.

V prípade, že sa rozhodnete svoju úlohu riešiť prehľadaním všetkých možností, napríklad pomocou nejakého programu, je nutné ukázať, že ste prehľadali všetky možnosti a váš program pracoval správne. Za riešenie programom bez popisu a vysvetlenia prečo program funguje korektne, nebudú udelené body. Ak do riešenia prikladáte akýkoľvek kód, musí to byť nutne pseudokód s patričnými komentármi čitateľný pre akéhokoľvek človeka. Nepredpokladá sa, že každý opravovateľ pozná všetky programovacie jazyky.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3+2+4+1+5+4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3+2+4+1+5+4 = 19$ bodov, Jaro $(3+\underline{2}+4+5+4)+2 = 20$ bodov a Marcel $(3+2+4+\underline{5}+4)+5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenia sa môžu zúčastniť aj úspešní riešitelia iných matematických súťaží organizovaných PF UPJŠ v Košiciach a Združením STROM, ak to kapacitné možnosti umožnia. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškolákmi) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROM**u, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 42. ročníka

***Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na** `https://seminar.strom.sk`.*

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **23. 10. 2017**

1. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka ABC (a oproti A, b oproti B a c oproti C). Navyše tieto dĺžky sú celočíselné a b, c sú nesúdeliteľné čísla. Nech D je priesečník strany BC a osi uhla BAC. Dokážte, že ak sú trojuholníky DBA a ABC podobné, tak c je druhou mocninou celého čísla.

2. Nech $P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1$ a $P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$ sú dva kvadratické polynómy s celočíselnými koeficientami. Platí, že $a_1 \neq a_2$ a existujú rôzne celé čísla m, n také, že $P_1(m) = P_2(n)$ a $P_1(n) = P_2(m)$. Dokážte, že $a_1 - a_2$ je párne.

3. Na stretnutie prišlo $2k+1$ ľudí. Každí dvaja sa buď poznajú, alebo nepoznajú (vzťahy sú vzájomné). Pre každú skupinu práve k ľudí existuje človek mimo tejto skupiny, ktorý v nej pozná každého. Dokážte, že na stretnutí je človek, ktorý pozná všetkých.

4. Nech c, d sú dva delitele čísla n, pričom $c > d$. Dokážte, že $c > d + d^2/n$.

5. Daný je trojuholník ABC. Nech k je jeho pripísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany BC v bode K a polpriamok AB a AC sa dotýka v bodoch L a M. Kružnica s priemerom BC pretína úsečku LM v bodoch P, Q, pričom P leží medzi L a Q. Dokážte, že polpriamky BP a CQ sa pretínajú v strede kružnice k.

6. Je možné napísať do každého políčka nekonečnej štvorčekovej tabuľky prirodzené číslo tak, aby pre každú dvojicu prirodzených čísel m, n platilo, že súčet čísel v ľubovoľnom obdĺžniku $m \times n$ je deliteľný $m + n$? Poznámka: Tabuľka je nekonečná do všetkých štyroch smerov, môžeme si to predstaviť tak, že má riadky aj stĺpce očíslované celými číslami.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **20. 11. 2017**

1. Celé čísla a, b, c spĺňajú rovnosť $a + b + c = bc$. Dokážte, že číslo $(a + b)(a + c)$ je deliteľné 4.

2. Deti sú rozdelené do 3 tímov – červeného, zeleného a modrého. Na začiatku je v červenom tíme c detí, v zelenom z detí a v modrom m detí. Keď sa stretnú dve deti z rôznych tímov, tak sa obaja pridajú k tímu tej farby, ktorú nemal ani jeden z nich. V závislosti od c, m, z zistite, či je možné, aby po čase skončili všetky deti v jednom tíme.

3. Biliardový stôl má tvar obdĺžnika $ABCD$. Nech $XKLMNX$ je dráha biliardovej gule, ktorá sa z bodu X dostane po odraze od všetkých štyroch strán biliardového stola naspäť na pôvodné miesto, t.j. body K, L, M, N ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA. Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník a dĺžka cesty nezávisí od polohy bodu X. Vyjadrite ju.

4. Na tabuli je napísaných $n > 3$ rôznych prirodzených čísel, ktoré sú nanajvýš $(n-1)!$. Pre každú dvojicu čísel $a > b$ na tabuli si do zošita zapíšeme čiastočný podiel (výsledok po celočíselnom delení) čísel a a b. (Teda ak $a = 47$ a $b = 7$, tak si zapíšeme 6.) Dokážte, že sme si do zošita zapísali aspoň 2 rovnaké čísla.

5. Nech α je dané reálne číslo. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(f(x + y)f(x - y)) = x^2 + \alpha y f(y).$$

6. $ABCD$ je rovnobežník s ostrým uhlom DAB. Body A, P, B, D ležia na jednej kružnici v tomto poradí. Priamky AP a CD sa pretínajú v bode Q. Bod O je stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ. Dokážte, že ak $D \neq O$, tak priamky AD a DO sú na seba kolmé.

Mohlo by sa hodiť...

Geometria

Tálesova veta: Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Veta o obvodovom a stredovom uhle: Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Nerovnosti

KA - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí, že ich kvadratický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich aritmetickému priemeru, t.j.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

GH - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí, že ich geometrický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich harmonickému priemeru, t.j.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Všeobecná priemerová nerovnosť: Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ definujeme ich priemer p-tého rádu ako

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}}.$$

Priemer p-tého rádu čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je väčší, nanajvýš rovný (rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich priemeru q-tého rádu práve vtedy, keď $p \geq q$, t.j.

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}}.$$

Poznámka. KA, AG a GH nerovnosti sú špeciálnymi prípadmi všeobecnej priemerovej nerovnosti.

Funkcionálne rovnice

Táto tématika sa na stredných školách veľmi nevyučuje, ale nie je to nič komplikované. Úlohou je len nájsť všetky funkcie, ktoré budú spĺňať zadanie. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre všetky hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. Nejde však o podmienky postačujúce, a preto je potrebné výslednú funkciu do rovnice dosadiť a urobiť skúšku. Viac o tom, ako riešiť takéto úlohy nájdete napríklad tu: `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`.

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n+1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n. kocka zapríčiní pád $(n+1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn+1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k+1$ predmetmi).

Táto formulácia môže znieť neprakticky, no v rôznych úlohách môže byť tento princíp užitočný. Predstavte si napríklad čísla ako predmety a zvyšky po delení m ako priehradky. Vyriešite tak úlohu: dokážte, že z ľubovoľných 11 prirodzených čísel viete vybrať dve, ktorých rozdiel končí nulou.

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2017 • Zimný semester 42. ročníka (2017/2018)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk