



Ahoj!

Práve sa Ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškólak, je presne pre Teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

STROMáci

Náboj

Matematický Náboj sa aj tento rok uskutoční v online podobe (tak, ako minulý rok), a to už o pár mesiacov - 18. marca 2022. Online súťaž bude takmer identická s tou "klasickou". Každý tím dostane po registrácii prihlasovacie údaje, ktorými sa v deň súťaže prihlási do online systému. Počas samotnej súťaže budú mať tímy dve hodiny na vyriešenie čo najväčšieho množstva úloh.

V tíme môže byť maximálne 5 žiakov, pričom všetci musia navštevovať rovnakú školu. Súťaž bude mať tento rok tri kategórie:

- Juniari: pre žiakov stredných škôl, ktorí nie sú v poslednom alebo predposlednom ročníku strednej školy
- Seniori: pre žiakov stredných škôl bez obmedzenia ročníka
- Špeciálna kategória Open: pre ľubovoľné tímy (súťažiaci nemusia byť žiakmi stredných škôl)

Podrobné pravidlá súťaže nájdete na <https://math.naboj.org/rules.php>. Prvé kolo registrácie sa začne 14. februára 2022 na adrese <https://math.naboj.org/register.php>. Neváhajte preto a dajte vedieť svojim učiteľom, žiakom alebo kamarátom, registrujte sa a my vás radi uvidíme 18. marca.

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% v STROME využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredueniach, ...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke zduzenie.strom.sk/sk/zduzenie/2percenta/. Radi vám zodpovieme ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj na e-mailovej adrese info@strom.sk. Ďakujeme!

Pokyny pre riešiteľov

Seminár STROM je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf sme vytvorili jednoduchý návod.

Ako písať riešenie?

Úlohy rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeniach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia posielaš cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači.

Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu riesenia.strom@strom.sk s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
 - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzdávaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
 - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- **tretiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasné, nie?

Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihneš odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do siedmich dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako sedem dní: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznižovať.

Nápovedy (novinka!)

Deň po termíne série sa zverejnia nápovedy k úlohám 5 a 6. Po termíne série máte ešte 24 hodín na odovzdanie úlohy 5 a 6 za 2/3 bodov, a potom ešte ďalších 6 dní na vyriešenie týchto úloh s pomocou nápovedy za polovicu bodov. Opravovať budeme posledné odovzdané riešenie.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškólakmi) môžu byť pozvaní ako náhradníci. Účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMU a Matboja, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia.

Účasť na sústredení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Počas sústredenia je účastník povinný rešpektovať pravidlá ustanovené Táborovým poriadkom (plné znenie Táborového poriadku nájdeš na seminar.strom.sk/media/uploads/taborovyporiadok.pdf).

Zadania úloh letného semestra 46. ročníka

Nezabudni si vytvoriť a aktualizovať profil na seminar.strom.sk.

1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **4. apríla 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Majme trojuholník ABC . Stredy strán BC , AC a AB sú označené postupne písmenami D , E a F . Dve ťažnice AD a BE sú navzájom kolmé. Vieme, že $|AD| = 3$ a $|BE| = 4$. Vypočítajte dĺžku ťažnice CF tohto trojuholníka.
2. Uvažujme polynóm $p(x)$ s celočíselnými koeficientami. Na grafe funkcie, ktorú určuje polynóm p , zvolíme dva body s celočíselnými súradnicami. Ukážte, že ak je vzdialenosť týchto bodov celočíselná, tak je úsečka, ktorá ich spája, rovnobežná s x -ovou osou.
3. Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q) , pre ktoré platí $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.
4. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AD a BC s uhlom veľkosti 120° pri vrchole A . Nech E je stred strany AB . Označme O_1 a O_2 postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom AED a BEC . Dokážte, že obsah lichobežníka $ABCD$ je 6-krát väčší ako obsah trojuholníka EO_1O_2 .
5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y).$$

K tejto úlohe pribudne na našej stránke 6. apríla nápoveda.

6. Kubo hrá hru, v ktorej si na začiatku zapíše ľubovoľné kladné celé číslo n . V každom ťahu môže svoje aktuálne číslo nahradiť za nové podľa nasledujúceho pravidla: ak má zapísané číslo $a + b$, kde a a b sú kladné celé čísla, potom môže toto číslo nahradiť číslom $a \cdot b$. Predpokladajme, že Kubo začína s kladným celým číslom $n \geq 5$, a majme dané kladné celé číslo m . Ukážte, že existuje postupnosť krokov, ktoré povedú k tomu, že Kubo bude mať zapísané číslo m .

K tejto úlohe pribudne na našej stránke 6. apríla nápoveda.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **9. mája 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému.
 - a) Dokážte, že sme nemohli dostať ako výsledok číslo pozostávajúce z 999 deviatok.
 - b) Dokážte, že ak nám vyšiel výsledok 10^{10} , tak pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.
2. Majme funkciu f definovanú na nezáporných celých číslach s hodnotami v množine celých čísel spĺňajúcu:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ f(n-1) + 1 & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Nájdite najmenšie nezáporné celé číslo n , pre ktoré je $f(n) = 2022$.

3. Kladné celé číslo n zafarbíme načerveno, ak ho vieme zapísať ako $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, kde k a všetky a_i sú kladné celé čísla a spĺňajú, že $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$. Ak viete, že všetky čísla od 33 po 73 sú zafarbené načerveno, dokážte, že aj všetky čísla väčšie ako 73 už musia byť červené.
4. V rovine máme konvexný $3n-1$ uholník, kde $n \geq 2$ je kladné celé číslo. Každú úsečku medzi dvoma jeho bodmi zafarbíme buď namodro, alebo načerveno. Ukážte, že existuje n disjunktných (nemôžu zdieľať žiaden bod) modrých alebo červených úsečiek.
5. Je daný pravý uhol AMB . Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM tak, aby vzdialenosť K od priamky MA bola dvakrát väčšia ako vzdialenosť L od priamky BM . Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.
K tejto úlohe pribudne na našej stránke 11. mája nápoveda.
6. Nájdite všetky nepárne kladné celé čísla m , pre ktoré postupnosť a_k , $k = 0, 1, \dots$, definovaná predpisom $a_0 = \frac{1}{2}(2m+1)$ a $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pre $k \geq 0$ obsahuje aspoň jedno celé číslo.
K tejto úlohe pribudne na našej stránke 11. mája nápoveda.



Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 4 • Január 2022 • Letný semester 46. ročníka (2021/2022)

Web: seminar.strom.sk

E-mail: strom@strom.sk

Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Web: zdruzenie.strom.sk

E-mail: info@strom.sk