



Ahoj!

Práve sa Ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolač, je presne pre Teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

STROMáci

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% v STROME využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredueniach, ...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispedia k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke zduzenie.strom.sk/sk/zduzenie/2percenta/. Radi vám zodpovieme ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj na e-mailovej adrese info@strom.sk. Ďakujeme!

Pokyny pre riešiteľov

Seminár STROM je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplníš povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ňa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf sme vytvorili jednoduchý návod.

Ako písať riešenie?

Úlohy rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeniach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Nezabúdaj, že ak má byť tvoje riešenie matematicky správne, tak musí obsahovať **presné výpočty**, takže čísla, s ktorými počítáš, nemôžu byť zaokrúhlené (napr. ak použiješ kalkulačku, ktorá každú hodnotu spočíta len na určitý počet desiatinných miest) alebo odmerané pravítkom. Zároveň opravovateľ musí **vedieť skontrolovať** tvoje riešenie za **primeraný čas**, takže priložiť 100 000 možností vypísaných počítačom nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov.

Svoje riešenia posielaj cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači. **Riešenie** každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu riesenia.strom@strom.sk s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
 - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzďovaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
 - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- **treťiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasný, nie?

Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihneš odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do siedmich dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako sedem dní: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznižovať.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im zodpovedajúcich ročníkov na viacročných gymnáziách), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) môžu byť pozvaní ako náhradníci. V prvom rade sú pozvaní víťazi Matboja a tí riešitelia STROMu, ktorí získali v semestri aspoň 30 bodov, nie však súťažiaci a riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Ďalší účastníci sú pozývaní podľa poradia Matboja. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia alebo riešiteľov, ktorí nedosiahli hranicu 30 bodov.

Účasť na sústreďení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Počas sústredenia je účastník povinný rešpektovať pravidlá ustanovené Poriadkom pobytových akcií (plné znenie Poriadku pobytových akcií nájdeš na seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf).

Zadania úloh letného semestra 47. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na seminar.strom.sk.

1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **20. marca 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Dokážte, že skupinu ľubovoľných $2n$ cifier, vieme rozdeliť na dve skupiny o veľkosti n tak, že rozdiel súčtov čísel v týchto skupinách bude nanajvýš 9.
2. Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y platí nerovnosť:

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geq xy.$$

3. Nech M je najmenšia množina racionálnych čísel, ktorá má nasledovné vlastnosti:

- M obsahuje $\frac{1}{2}$.
- Ak M obsahuje $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je kladné celé číslo, tak obsahuje aj $\frac{p}{p+q}$ a $\frac{q}{p+q}$.

Dokážte, že množina M obsahuje všetky racionálne čísla v intervale $(0, 1)$.

4. Kladné celé číslo n má práve d deliteľov a zároveň sa medzi jeho deliteľmi nevyskytuje štvorec väčší než 1. Koľko najviac z týchto deliteľov (vzhľadom ku n a d) môžeme vybrať tak, aby pre žiadne dva vybrané delitele a, b nebol $a^2 + ab - n$ nenulový štvorec?
5. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 0$ a pre každé $k \geq 1$ platí $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

6. Majme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B . Nech BD je výška z vrcholu B na stranu AC (bod D leží na AC). Ďalej označme R, S a T postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD, CBD a ABC . Ukážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku RST leží na priamke AC .

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **17. apríla 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Pre kladné celé n dokážte, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2.$$

2. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme E stred strany AB a F stred strany CD . Pre tento štvoruholník platí, že $|EF| = \frac{|AD|+|BC|}{2}$. Dokážte, že strany AD a BC sú rovnobežné.

3. Anton a Beton hrajú hru s číslami od 1 do 2022. Na začiatku sú čísla zoradené zostupne. Anton má silu A a Beton má silu B . Hráči sa striedajú v ťahoch, počnúc Antonom, a v každom ťahu si môže hráč so silou M vybrať nejakých M čísel a ľubovoľne ich preusporiadať. Beton chce rad čísel usporiadať vzostupne, Anton mu v tom chce zabrániť. Zistite, či sa to Betonovi podarí za konečný počet ťahov, ak sila Antona je $A = 1000$ a Beton má silu

- a) $B = 1000$,
- b) $B = 1001$,
- c) $B = 1002$.

4. Majme úsečku AB a bod P v jej strede. Nech T je bod dotyku dotyčnice vedenej z bodu A ku kružnici s priemerom PB . Vyjadrite dĺžku úsečky PT v závislosti od dĺžky AB .

5. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 1$ a $a_{k+1} = a_k^2 + 1$ pre všetky kladné celé čísla k . Dokážte, že existuje kladné celé číslo n také, že a_n je deliteľné prvočíslom, ktoré obsahuje viac ako 2022 cifier.

6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

Názov:	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2023 • Letný semester 47. ročníka (2022/2023)
Web:	seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk .
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk