



Ahoj!

Práve sa ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolač, je presne pre teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na tvoje riešenia!

STROMáci

Pokyny pre riešiteľov

Seminár STROM je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplníš povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ňa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf sme vytvorili jednoduchý návod.

Ako písať riešenie?

Úlohy rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeniach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Nezabúdaj, že ak má byť tvoje riešenie matematicky správne, tak musí obsahovať **presné výpočty**, takže čísla, s ktorými počítáš, nemôžu byť zaokrúhlené (napr. ak použiješ kalkulačku, ktorá každú hodnotu spočíta len na určitý počet desiatinných miest) alebo odmerané pravítkom. Zároveň opravovateľ musí **vedieť skontrolovať** tvoje riešenie za **primeraný čas**, takže priložiť 100 000 možností vypísaných počítačom nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov.

Svoje riešenia posielaj cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači. **Riešenie** každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu riesenia.strom@strom.sk s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
 - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzďavaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
 - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- **treťiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasný, nie?

Hodnotený budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotený vysokým počtom bodov.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihneš odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do siedmich dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako sedem dní: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznižovať.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im zodpovedajúcich ročníkov na viacročných gymnáziách), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) môžu byť pozvaní ako náhradníci. V prvom rade sú pozvaní víťazi Matboja a tí riešitelia STROMu, ktorí získali v semestri aspoň 30 bodov, nie však súťažiaci a riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Ďalší účastníci sú pozývaní podľa poradia Matboja. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia alebo riešiteľov, ktorí nedosiahli hranicu 30 bodov.

Účasť na sústredení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Počas sústredenia je účastník povinný rešpektovať pravidlá ustanovené Poriadkom pobytových akcií (plné znenie Poriadku pobytových akcií nájdeš na seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf).

Zadania úloh zimného semestra 48. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na seminar.strom.sk.

1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **2. novembra 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Martin si myslí číslo. Mihálovi prezradil, že má práve 4 deliteľov. Potom sa ho Mihál opýtal, aká je jeho posledná cifra. Martin mu odpovedal: „To ti nemôžem povedať, pretože by si už vedel, aké je to číslo.“ Aké číslo si Martin myslí? Nájdi všetky možnosti.
2. V ostrouhlom trojuholníku ABC má strana AC dĺžku 4. Kružnica opísaná tomuto trojuholníku má priemer 8.
 - a. Označme D priesečník dotyčnic k opísanej kružnici v bodoch A a C . Aké hodnoty môže nadobúdať veľkosť uhla ADC ?
 - b. Aké hodnoty môže nadobúdať veľkosť uhla ABC ?
3. Existuje päť rôznych kladných celých čísel, pre ktoré platí, že súčet ľubovoľnej trojice z nich je deliteľný súčtom zvyšnej dvojice?
4. Adam a Bruno hrajú hru. Majú napísaných $n \geq 12$ za sebou idúcich prirodzených čísel. Začína Adam, v ťahoch sa striedajú a v každom ťahu jeden z nich škrtnie jedno číslo, až kým neostanú napísané posledné dve čísla. Ak najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel je 1, vyhrá Adam, inak vyhrá Bruno.
 - a. Kto má víťaznú stratégiu, ak n je párne?
 - b. Kto má víťaznú stratégiu, ak n je nepárne?
5. Sú dané kladné reálne čísla a_1, a_2, \dots, a_n také, že:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n \cdot a_1.$$

Určte, pre ktoré n vieme z každej takejto n -tice vybrať tri čísla $a_i \leq a_j \leq a_k$, pre ktoré platí:

$$a_i^2 + a_j^2 > a_k^2.$$

6. Majme kváder s nepárnymi celočíselnými rozmermi rozdelený na menšie kvádre s celočíselnými rozmermi. Dokážte, že medzi týmito menšími kvádrmi existuje kváder, ktorého vzdialenosti od stien veľkého kvádra:
 - a. majú párny súčet,
 - b. sú všetky párne alebo dve párne a štyri nepárne.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **27. novembra 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Rozhodnite, či existujú navzájom rôzne prvočísla p_1, p_2, \dots, p_n také, že:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

2. Majme trojuholník ABC so stranou AB dlhou 8 a uhlom oproti tejto strane veľkosti 120 stupňov. Označme p a q dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B . Majme kružnicu k , ktorá sa dotýka naraz úsečky AB a priamok p a q . Označme D priesečník p a q a E bod dotyku p a k . Aká môže byť vzdialenosť DE ? Nájdite všetky možnosti.
3. V rade stojí $a + b$ misiek očíslovaných od 1 po $a + b$, kde a, b sú kladné celé čísla. V prvých a miskách je po jednom citrón a v posledných b miskách je po jednej limetke. V jednom ťahu vieme presunúť citrón z misky i do $i + 1$ a limetku z j do $j - 1$, ak rozdiel $|i - j|$ je párny. V jednej miske môže byť naraz aj viac citrusov. Chceme dostať postupom týchto krokov limetky do prvých b misiek a citróny do posledných a misiek (do každej jeden citrus). Pre aké a, b je to možné?
4. Na chodbe sa rozbil kvetináč. Spýtali sme sa dvoch najbližších tried, kto rozbil kvetináč. Každý žiak obvinil práve jedného žiaka z tej druhej triedy. Dokážte, že vieme dať maslo na hlavu niektorým žiakom tak, že ak sa spýtame všetkých žiakov s maslom na hlave, povedia dokopy práve mená všetkých žiakov bez masla na hlave.
5. Predĺženie ťažnice z A v trojuholníku ABC pretne opísanú kružnicu v D rôznom od A , predĺženie ťažnice z B ju pretne v E rôznom od B . F a G delia strany a a b v tomto poradí v pomere $2 : 1$ tak, že kratšie úseky sú priľahlé k C . Dokáž, že uhly AGE a BFD sú zhodné.
6. Majme celé číslo c a polynóm $P(x)$ stupňa n , ktorého koeficienty sú celé čísla. Označme D najväčšie celé číslo, pre ktoré platí, že D delí $P(i)$ pre každé celé číslo i . Dokážte, že potom D je najväčší spoločný deliteľ čísel $P(c), P(c + 1), \dots, P(c + n)$.

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 1 • September 2023 • Zimný semester 48. ročníka (2023/2024)

Web: seminar.strom.sk

E-mail: strom@strom.sk

Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Web: zdruzenie.strom.sk

E-mail: info@strom.sk