STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie STROMu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

STROMáci

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% v STROMe využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach,. . .).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/`. Radi vám zodpovieme ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj na e-mailovej adrese `info@strom.sk`. Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

Ak premýšľaš, čo s časom počas ďalších letných prázdnin, a si prvák, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií a samotnú pozvánku s prihlasovaním nájdeš na `https://seminar.strom.sk/tmm/`.

1.

Opravovali: **Bianka Gurská a Matúš Masrna**
Počet riešení: 44 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**

Vo vrcholoch 40-uholníka sú ľubovoľne vpísané čísla od 1 do 40, každé práve raz. Koľko najviac z nich môže byť deliteľných svojím susedom v smere hodinových ručičiek?

Riešenie

Keďže máme čísla od 1 do 40, najväčšie číslo, ktoré bude mať medzi zvyšnými číslami nejaký svoj násobok je 20, pretože $21 \cdot 2 = 42$, ktoré už nepatrí medzi zadané čísla. Zároveň všetky čísla od 1 do 20 majú medzi zvyšnými svoj dvojnásobok. Teda vyhovujúcich čísel môže byť maximálne 20, a to tých, ktorých sused v smere hodinových ručičiek bude jedno z čísel od 1 do 20.

Teraz nám už stačí iba skonštruovať taký 40-uholník, kde 20 čísel je deliteľných svojim susedom v smere hodinových ručičiek. Budeme to robiť tak, že pred každým číslom od 1 do 20 bude jeho dvojnásobok: (čísla píšeme zaradom tak, ako by v 40-uholníku išli v smere hodinových ručičiek)

$39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 38, 19, 34, 17, 30, 15, 26, 13, 22, 11, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 40, 20, 10, 5, 36, 18, 9, 6, 3, 32, 16, 8, 4, 2, 1$

Komentár

Aj pre riešiteľov, ktorým boli v tejto úlohe strhnuté body, aj pre tých, ktorí sa s takýmto typom úlohy veľa ešte nestretli, je dôležité si zapamätať jednu vec. Pre úplné riešenie úloh typu „Koľko najviac“ je rovnako potrebné korektne dokázať, že váš výsledok je maximum, teda že na viac už to nepôjde, a dokázať, že vaše maximum naozaj pôjde skonštruovať, spravidla samotnou konštrukciou.

2.

Opravovali: **Erik Novák a Ľubo Vargovčík**
Počet riešení: 36 Najkrajšie riešenia: **Veronika Jakabová a Martin Dudjak**

Nájdite všetky reálne čísla a, pre ktoré:

$$a^{2024} - 2a^{2023} + 2a^{2022} - 2a^{2021} + \cdots + 2a^2 - 2a + 1 = 0.$$

Riešenie

Rovnicu zo zadania si môžeme upraviť nasledovne:

$$a^{2024} - a^{2023} - a^{2023} + a^{2022} + a^{2022} \ldots - a - a + 1 = 0$$
$$(a^{2024} - a^{2023}) - (a^{2023} - a^{2022}) + \ldots + (a^2 - a) - (a - 1) = 0$$

Teraz môžeme z každej zátvorky vyňať $a - 1$.

$$(a-1) \cdot (a^{2023} - a^{2022} + a^{2021} - a^{2020} + \ldots + a^3 - a^2 + a - 1) = 0$$

Tento proces môžeme ešte raz zopakovať.

$$(a-1) \cdot ((a^{2023} - a^{2022}) + (a^{2021} - a^{2020}) + \ldots + (a^3 - a^2) + (a - 1)) = 0$$
$$(a-1) \cdot (a-1) \cdot (a^{2022} + a^{2020} + a^{2018} + \ldots + a^2 + 1) = 0$$
$$(a-1)^2 \cdot (a^{2022} + a^{2020} + a^{2018} + \ldots + a^2 + 1) = 0$$

Všimnime si, že na ľavej strane máme súčin mnohočlenov a na pravej nulu. Z toho vyplýva, že na to, aby rovnosť platila, musí byť aspoň jeden z mnohočlenov rovný 0. Môžeme začať prvým mnohočlenom $(a - 1)$, ten je rovný nule v prípade, že $a = 1$. Čiže 1 je prvá možná hodnota čísla a spĺňajúca podmienku zo zadania.

V prípade, že a nie je 1, musí byť súčet v druhom mnohočlene rovný 0. V druhom mnohočlene máme súčet párnych mocnín čísla a a 1. V obore reálnych čísel bude súčet párnych mocnín čísla vždy nezáporný, a ak k nemu prirátame 1, tak tento mnohočlen bude určite vždy kladný. Z toho vyplýva, že druhý mnohočlen nemôže byť nikdy rovný 0.

Takže máme jedinú možnosť, a to $a = 1$.

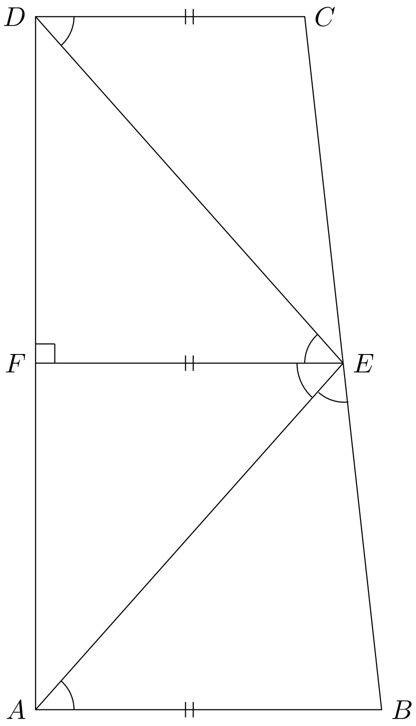
3.

Opravovali: **Miriam Horváthová a Štefan Vašak**
Počet riešení: 41 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

V lichobežníku $ABCD$ je strana AB rovnobežná so stranou CD a pri vrcholoch A a D sú pravé uhly. Na úsečke BC vyznačíme bod E tak, aby platilo $|CE| = |EB| = |AB|$. Dokážte, že veľkosť uhla BED je trojnásobkom veľkosti uhla CDE.

Riešenie

Zo zadania vieme, že $|BE| = |CE|$, teda že E je stredom strany BC. Bodom E veďme rovnobežku so základňami lichobežníka a označme F priesečník so stranou AD. Úsečka FE je potom strednou priečkou lichobežníka.

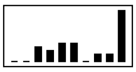


Zo zadania tiež vieme, že $|EB| = |AB|$, čiže o trojuholníku AEB vieme povedať, že je rovnoramenný. Jeho rovnaké uhly si označme ako α. Úsečky AB a FE sú rovnobežné, teda uhly FEA a EAB sú striedavé. Vieme teda, že aj uhol FEA je α.

Všimnime si tiež, že trojuholníky FEA a FED sú zhodné podľa vety SUS, pretože stranu FE majú zhodnú, uhly EFA a EFD sú oba pravé z rovnobežnosti FE so základňami a strany AF a FD sú rovnako dlhé, pretože F je bodom strednej priečky, teda stredom strany AD. Zo zhodnosti vyplýva, že uhly AEF a DEF sú zhodné, a preto oba majú veľkosť α.

Vieme teda, že uhol BED má veľkosť 3α. Na dokázanie úlohy nám teda už iba stačí ukázať, že uhol CDE má veľkosť α. To už pôjde jednoducho. Uhol CDE je totiž striedavý s uhlom FED, o ktorom už vieme, že má veľkosť α. Úlohu máme teda dokázanú.

4. Opravovali: **Martin Masrna a Branislav Ječim**
Počet riešení: 35 Najkrajšie riešenie: **Oliver Seman**



Alica a Beáta hrajú hru. Na začiatku hry je na stole $n \geq 2$ kamienkov a v prvom ťahu si zo stola Alica vezme nejaký počet kamienkov (ale nie všetky). Následne sa striedajú v ťahoch, pričom vždy môže hráč zobrať len počet kamienkov, ktorý je menší alebo rovný počtu kamienkov, ktoré zobral hráč pred ním. Hru vyhráva hráč, ktorý zo stola zoberie posledný kamienok. V závislosti od n určte, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.

Riešenie

Označme Alicu A a Beátu B.

Pre $n = 2$ musí A vziať nejaký kamienok, avšak nie všetky zo stola, takže vezme práve 1. B tiež vezme 1 kamienok a vyhrá.

Pre všetky nepárne n má víťaznú stratégiu A. Ak vezme hneď v prvom ťahu 1 kamienok, tak B a A môžu potom v ďalších ťahoch brať zo stola vždy len 1 kamienok (0 podľa zadania vziať nemôžu). Pri takomto priebehu bude po každom ťahu A na stole vždy párny a po ťahu B vždy nepárny počet kamienkov. Keďže 0 je párna, k počtu 0 kamienkov sa dostaneme určite po ťahu A.

Poďme sa pozrieť na párne n. Ak A alebo B v ľubovoľnom bode hry vezme zo stola nepárny počet kamienkov, na stole zostane nepárny počet kamienkov. Druhá hráčka by tak mohla využiť vyššie popísanú stratégiu a vyhrať. Môžeme sa teda tváriť, že kamienky sú spolu zviazané po dvojiciach (a hráčky tak môžu brať iba párne počty kamienkov) a úlohu ďalej riešiť pre $\frac{n}{2}$.

Ak je $\frac{n}{2}$ nepárne, tak víťaznou stratégiou pre A je vziať jednu dvojicu (pre nepárny počet dvojíc vezme poslednú vždy A, rovnakou úvahou ako pre nepárne čísla).

Ak je $\frac{n}{2}$ párne a väčšie ako 2, rovnakou úvahou ako pre n dospejeme k záveru, že ak ktorákoľvek z hráčok zoberie nepárny počet dvojíc, prehrá. Preto sa môžeme tváriť, že dvojice kamienkov sú spolu zviazané do dvojíc (teda do skupín 4 kamienkov), a úlohu ďalej riešiť pre $\frac{n}{4}$.

Takto budeme postupovať, až pokiaľ nám nezostane nepárny počet 2^k-tíc kamienkov (pre všetky nepárne čísla má víťaznú stratégiu A) alebo dve rovnako veľké 2^k-tice (pre $n = 2$ má víťaznú stratégiu B).

Ak sme sa postupným delením čísla n dvojkami dostali k číslu 2, muselo byť n mocninou dvojky. Preto ak je n mocninou dvojky, má víťaznú stratégiu B a vo všetkých ostatných prípadoch A.

Iné riešenie

Označme Alicu A a Beátu B. Poďme najprv indukciou dokázať, že pre $n = 2^k$ má víťaznú stratégiu B.

Pre $n = 2$ je jediný povolený ťah pre A zobrať jeden kamienok. B potom zoberie ten druhý a vyhrá. Predpokladajme teda, že to platí pre $n = 2^{k-1}$, a poďme to dokázať pre $n = 2^k$ $(k \geq 2)$.

Ak A zoberie aspoň n^{k-1} kamienkov, tak B zoberie všetky zvyšné a vyhrá. Ak A zoberie menej ako n^{k-1} kamienkov, tak z indukčného predpokladu vyplýva, že B vie hrať tak, aby ako posledný zobrala n^{k-1}-ty kamienok (keďže má víťaznú stratégiu pre n^{k-1} kamienkov). Na stole potom ostane n^{k-1} kamienkov a na ťahu je opäť A – z indukčného predpokladu vyplýva, že vyhrá B. Dôkaz indukciou je hotový.

Pre akékoľvek iné n, ktoré nie je mocninou dvojky (vo všeobecnosti toto číslo vieme zapísať ako $n = 2^k + l$, kde $0 < l < 2^k$ – teda ako najbližšiu nižšiu mocninu dvojky a nejaký nenulový rozdiel), má víťaznú stratégiu A.

Táto stratégia je veľmi jednoduchá – v prvom ťahu A zoberie l kamienkov. Na ťahu je B a má pred sebou 2^k kamienkov – už sme dokázali, že v tejto situácii vyhrá hráč, ktorý práve nie je na ťahu. Ostáva dodať, že B nebude vedieť zobrať všetkých 2^k kamienkov práve vďaka tomu, že $l < 2^k$.

Komentár

Nebolo ťažké si všimnúť, že Beáta vie vyhrať práve pre všetky mocniny dvojky, ťažšie to už bolo dokázať. Mnohí z vás na to išli nejako takto: pozície 2 a 4 sú prehrávajúce, teda pozície 3, 5, 6, 7 sú vyhrávajúce, a teda pozícia 8 je prehrávajúca, pozície 9, ..., 15 sú vyhrávajúce, 16 je prehrávajúca, ... Treba si ale uvedomiť, že ak je napríklad pozícia 14 vyhrávajúca vďaka tomu, že viem zobrať 6 kameňov, tak vo chvíli, keď začínam na 16 a zoberiem 2 kamene, súper nevie z tejto „vyhrávajúcej pozície“ urobiť tento „vyhrávajúci ťah“, pretože ho pravidlá nedovoľujú. Takto ste mnohí došli k správnemu výsledku nie celkom správnym postupom, za čo samozrejme museli ísť body dole. Napriek tomu nás teší veľké množstvo odoslaných riešení a to, že všetci ste úlohu aspoň čiastočne vyriešili.

5. Opravovali: **Mimi Hanus a Benji Mravec**
Počet riešení: 12 Najkrajšie riešenie: **Michal Iľkovič**

64 škriatkov sa hrá so šachovnicou 64×64 políčok. Postupne si vyberajú po jednom políčku, až kým nie sú rozdelené všetky políčka (teda na konci má každý z nich vybraných presne 64 políčok). Dokážte, že bez ohľadu na to, ako si škriatkovia políčka vyberajú, vždy bude existovať riadok alebo stĺpec, v ktorom bude mať aspoň 8 rôznych hráčov po aspoň jednom políčku.

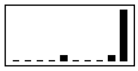
Riešenie

Označme V počet usporiadaných dvojíc, kde prvý prvok je riadok alebo stĺpec a druhý prvok je škriatok, ktorý v ňom má políčko. Vieme ho vyjadriť dvomi spôsobmi: ako súčet cez všetkých škriatkov, kde každý škriatok prispeje počtom stĺpcov a riadkov, v ktorých má vybrané políčka, alebo ako súčet cez všetky stĺpce a riadky, kde každý stĺpec alebo riadok prispeje počtom škriatkov, ktorí v ňom majú vybrané políčka.

Keď označíme premennou S_i počet stĺpcov, v ktorých má škriatok i vybraté políčko, a premennou R_i počet riadkov, v ktorých má škriatok i vybraté políčko, $S_i \cdot R_i \geq 64$, lebo 64 políčok škriatka i sa musí zmestiť do týchto stĺpcov a riadkov. Z AG nerovnosti vyplýva, že $S_i + R_i \geq 2 \cdot \sqrt{S_i \cdot R_i} = 2 \cdot 8 = 16$. Odtiaľ príspevok každého škriatka k hodnote V je aspoň 16 a $V = \sum_{i=1}^{64}(S_i + R_i) \geq 64 \cdot 16 = 1024$.

Keby si v každom riadku a v každom stĺpci vybralo políčka najviac 7 rôznych škriatkov, každý stĺpec alebo riadok by prispel k hodnote V najviac 7, čiže by V bolo najviac $(64 + 64) \cdot 7 = 896$. To je spor, a teda bez ohľadu na to, ako si škriatkovia políčka vyberú, vždy bude existovať riadok alebo stĺpec, ktorý bude obsahovať políčka vybraté aspoň 8 rôznymi škriatkami.

6. Opravovali: **Ján Richnavský a Martin Šmilňák**
Počet riešení: 12 Najkrajšie riešenie: **Michal Iľkovič**



Majme trojuholník ABC. Na strane AC je bod D a os uhla BAC pretína úsečku BD v bode X a úsečku BC v bode Y tak, že platí $AX : XY = 3 : 1$ a $BX : XD = 5 : 3$. Určte veľkosť uhla ACB pomocou veľkosti uhla BAC.

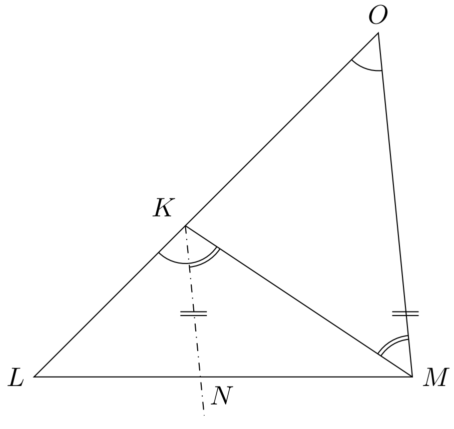
Riešenie

V riešení sa dala využiť tzv. „veta o osi uhla“, podľa ktorej platí, že pomer dĺžok strán zvierajúcich uhol je rovný pomeru dĺžok úsekov, na ktoré os uhla tretiu stranu trojuholníka delí. Vieme to dokázať nasledovne.

Vo všeobecnom trojuholníku KLM sa pozrime na os uhla LKM, jej priesečník so stranou LM označme N. K nej doplníme rovnobežnú priamku takú, aby na nej ležal bod M. Priesečník tejto priamky a priamky KL nazvime O.

Z vlastností súhlasných uhlov platí $|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle LOM|$. Keďže je KN osou ohla, platí $|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle NKM|$. Z vlastností striedavých uhlov platí $|\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle KMO|$. Z uvedeného vyplýva, že $|\sphericalangle LOM| = |\sphericalangle KMO|$, a teda že trojuholník KMO je rovnoramenný so základňou MO.

Trojuholníky LNK a LMO sú zjavne podobné podľa vety uu (rovnaký uhol pri vrchole L a už ukázané $|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle LOM|$). Z toho plynie $|LN| : |NM| = |LK| : |KO|$. Nakoľko z predchádzajúceho odseku vieme, že $|KM| = |KO|$, rovnosť týchto pomerov vieme prepísať na $|LN| : |NM| = |LK| : |KM|$, čo sme chceli dokázať (pomer dĺžok úsekov strany delenej osou uhla sa rovná pomeru dĺžok strán zvierajúcich uhol).



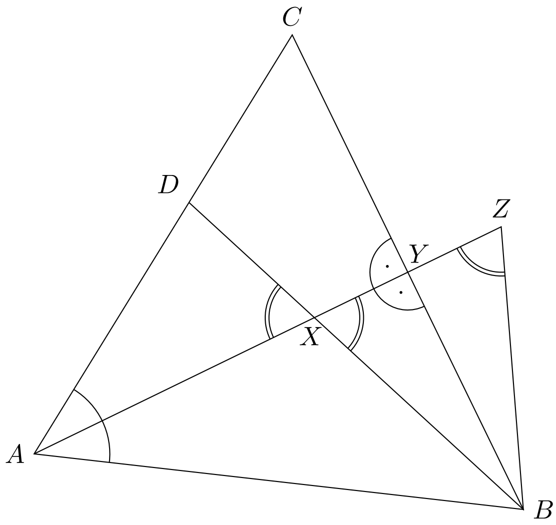
Teraz sa môžeme vrátiť k nášmu zadaniu. Nakoľko je priamka AX osou uhla BAC, z vety o osi uhla v trojuholníku ABD vyplýva, že $|AB| : |AD| = |BX| : |XD|$, čo je zo zadania rovné $5 : 3$.

Označme Z bod ležiaci na polpriamke opačnej k YX taký, že $|XY| = |YZ|$. Keďže zo zadania $|AX| : |XY| = 3 : 1$ a $|XY| : |YZ| = 1 : 1$, platí, že $|AZ| : |AX| = 5 : 3$.

Trojuholníky ABZ a ADX sú podobné podľa vety *sus* (keďže je AZ osou uhla, platí $|\sphericalangle ZAB| = |\sphericalangle XAD|$, a pre dvojice strán platí $|AZ| : |AX| = |AB| : |AD| = 5 : 3$). Z tejto podobnosti vyplýva $|\sphericalangle AZB| = |\sphericalangle AXD|$. Z vlastností vrcholových uhlov plynie $|\sphericalangle AXD| = |\sphericalangle BXZ|$. Trojuholník BZX má dva vnútorné uhly rovnaké, a teda je rovnoramenný so základňou ZX.

Nakoľko leží Y na strede úsečky XZ, BY je ťažnicou v tomto trojuholníku. Keďže je trojuholník rovnoramenný, ťažnica je na základňu kolmá. Z vlastností susedných uhlov $|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle AYC| = 90°$.

Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku AYC vyplýva, že $|\sphericalangle CAY| + |\sphericalangle YCA| = 90°$. Uhol CAY je polovicou uhla BAC, preto $|\sphericalangle YCA| = 90° - \frac{|\sphericalangle BAC|}{2}$, resp. $|\sphericalangle ACB| = 90° - \frac{|\sphericalangle BAC|}{2}$.



Zadania úloh letného semestra 48. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **22. apríla 2024**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Nech prvých 5 členov postupnosti je $1, 2, 3, 4$ a 5. Od šiesteho člena ďalej platí, že každý člen postupnosti sa rovná súčinu všetkých predchádzajúcich členov mínus 1. Dokážte, že súčin prvých 70 členov postupnosti sa rovná súčtu ich druhých mocnín.

2. Paťo má na tabuli napísané všetky celé čísla od 1 do N. V jednom kroku zmaže jedno číslo na tabuli a spolu s ním zmaže aj všetky jeho delitele, ktoré boli na tabuli, a napíše všetky jeho kladné delitele, ktoré na tabuli neboli. Napríklad, ak sú na tabuli čísla 1, 2, 5 a 6, tak po zmazaní 6 budú na tabuli 3 a 5.

a. Dokážte, že pre ľubovoľné N sa Paťo vie dostať do stavu, keď na tabuli nebude napísané žiadne číslo.

b. Dokážte, že bez ohľadu na N a na to, ako si Paťo čísla vyberá, vždy v konečnom počte krokov dôjde do stavu, keď na tabuli nebude napísané žiadne číslo.

3. Na začiatku hry máme 3 krabice, v ktorých je postupne $2023, 2024$ a 2025 kameňov. Anna a Boris sa striedajú v ťahoch, Anna začína. Ten, kto je na ťahu si vyberie 2 krabice, odstráni z nich všetky kamene a potom rozdelí kamene z tretej krabice do všetkých troch krabíc:

a. rovnomerne (tak, aby rozdiel počtov kameňov v rôznych krabiciach bol najviac 1)

b. ľubovoľne

tak, aby žiadna krabica nebola prázdna. Keď hráč nemôže uskutočniť platný ťah, prehral. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu a akú?

4. Nech O je stred opísanej kružnice trojuholníka ABC. Opíšme bodom AOB kružnicu k. Nech je druhý prienik priamky AC s k bod P a druhý prienik priamky CB s k Q tak, že body P a Q ležia mimo trojuholníka ABC. Dokážte, že priamka CO je kolmá na priamku PQ.

5. Nájdite všetky kvadratické funkcie f, pre ktoré existujú celé čísla m, n také, že:

$$f(m) = f(6m - 1),$$

$$f(n) = f(3 - 15n).$$

6. Majme postupnosť reálnych čísel, pre ktorú platí, že $a_0 = 1$ a

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45{a_n}^2 - 36}}{2}$$

pre každé nezáporné celé číslo n. Dokážte, že každý člen tejto postupnosti je kladné celé číslo.

Poradie po 1. sérii letného semestra 48. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 10.	Lucia Chladná	S3	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
	Marek Horváth	S3	GKonšPO	9	9	9	9	9	9	0	54
	Michal Iľkovič	S3	GSMTŠPO	9	9	9	9	9	9	0	54
	Tomáš Sukeľ	S2	GAGLSHE	9	9	9	9	-	9	0	54
	Sarah Klopstock	S1	ŠpMNDaG	9	9	9	9	-	9	0	54
	Richard Vodička	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Michal Vodička	S1	GAlejKE	9	9	9	9	-	9	0	54
	Eva Krajčiová	S2	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Matúš Pokorný	S2	GAMČABA	9	9	9	9	9	-	0	54
	Šimon Komara	Z9	ZŠKúpeľná	9	9	9	9	9	-	0	54
11.	Alexander Košťál	S2	GJaroBR	9	9	9	8	8	-	0	51
12. - 14.	Alenka Bálintová	S1	BGMHSuč	9	9	9	9	-	-	0	45
	Oliver Seman	S2	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	45
	Matúš Libák	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	-	0	45
15.	Lívia Lukáčová	Z9	ZPoliKE	5	5	9	2	-	9	0	39
16.	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	9	-	9	2	-	9	0	38
17. - 19.	Natália Poliačiková	S3	GPoštKE	9	9	6	8	0	4	0	36
	Richard Prikler	S1	GJARMPO	9	5	9	4	-	-	0	36
	Juraj Kramár	S3	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	36
20. - 21.	Martin Dudjak	S2	SMládPP	9	9	9	4	-	-	0	35
	Marie Kasalová	Z9	GTruhla	9	9	8	-	-	-	0	35
22. - 24.	Tomáš Saksun	Z9	GAlejKE	7	5	9	5	0	-	0	33
	Veronika Jakabová	S2	GAlejKE	9	9	9	3	-	-	0	33
	Sophia Sotáková	Z9	ZŠverHE	7	1	9	-	-	8	0	33
25. - 28.	Nina Anna Betáková	S2	GAGLSHE	9	8	9	3	-	-	0	32
	Ondrej Králik	S3	GAlejKE	9	9	9	5	-	-	0	32
	Janka Urbánová	S1	GAlejKE	-	9	9	5	-	-	0	32
	Michal Ferdinandy	S1	GAlejKE	9	-	9	5	-	-	0	32
29. - 30.	Martina Osuská	S1	GJHN3BA	9	-	8	5	-	-	0	30
	Kalista Semancová	S3	GAGLSHE	9	9	9	3	-	-	0	30
31.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	9	1	7	4	-	-	0	28
32. - 33.	Veronika Vodičková	S3	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	0	27
	Filip Findorák	S2	Šrobárka	9	9	9	-	-	-	0	27
34. - 35.	Lívia Sušková	Z9	EGJAKKE	7	-	8	4	-	-	0	26
	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	9	9	8	-	-	-	0	26
36.	Ondrej Tóth	S1	SPS KNM	9	-	-	7	2	-	0	25
37.	Karin Sabová	S2	GAlejKE	4	9	8	-	-	-	0	21
38. - 40.	Oskar Cacara	S2	GPoštKE	2	9	9	-	-	-	0	20
	Lucia Kleščová	S3	GPoštKE	9	-	9	2	-	-	0	20
	Samuel Šandor	S2	GPoštKE	9	2	9	-	-	-	0	20
41.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S3	Šrobárka	9	-	9	-	-	-	0	18
42.	Klára Fidermáková	S3	SPŠTaD	4	1	7	4	-	-	0	16
43.	Oliver Urdzik	S3	GymGol	9	5	-	-	-	-	0	14
44.	Tomáš Lang	S1	SPŠTSNV	4	-	-	2	-	-	0	8
45.	Martin Vrba	S1	GPoštKE	-	-	-	7	-	-	0	7
46.	Katarína Farbulová	S3	GPoštKE	6	-	-	-	-	-	0	6

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2024 • Letný semester 48. ročníka (2023/2024)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.