



## Ahoj!

Práve sa ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolač, je presne pre teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na tvoje riešenia!

STROMáci

## Pokyny pre riešiteľov

**Seminár STROM** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

### Registrácia

Registrovat' do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese [seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf) sme vytvorili jednoduchý návod.

### Ako písať riešenie?

**Úlohy** rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeníach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Nezabúdaj, že ak má byť tvoje riešenie matematicky správne, tak musí obsahovať **presné výpočty**, takže čísla, s ktorými počítáš, nemôžu byť zaokrúhlené (napr. ak použiješ kalkulačku, ktorá každú hodnotu spočíta len na určitý počet desiatinných miest) alebo odmerané pravítkom. Zároveň opravovateľ musí **vedieť skontrolovať** tvoje riešenie za **primeraný čas**, takže priložiť 100 000 možností vypísaných počítačom nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov.

Svoje riešenia posielaj cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači. **Riešenie** každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk) alebo osobne.

### Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu [riesenia.strom@strom.sk](mailto:riesenia.strom@strom.sk) s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
  - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzďavaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
  - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

### Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, októva:** všetky vyriešené úlohy
- **tretiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

## Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$  bodov. Jasné, nie?

Hodnotenú budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotenú vysokým počtom bodov.

## Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihnú odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

## Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

## Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

## Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im zodpovedajúcich ročníkov na viacročných gymnáziách), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškólakmi) môžu byť pozvaní ako náhradníci. V prvom rade sú pozvaní víťazi Matboja a tí riešitelia STROMu, ktorí získali v semestri aspoň 30 bodov, nie však súťažiaci a riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Ďalší účastníci sú pozývaní podľa poradia Matboja. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov Máš Problém?!, riešiteľov z minulého semestra podľa poradia alebo riešiteľov, ktorí nedosiahli hranicu 30 bodov.

Účasť na sústredení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Počas sústredenia je účastník povinný rešpektovať pravidlá ustanovené Poriadkom pobytových akcií (plné znenie Poriadku pobytových akcií nájdeš na [seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf)).

## Zadania úloh letného semestra 49. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na [seminar.strom.sk](http://seminar.strom.sk).

# 1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **31. marca 2025**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke [seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf).

1. Kladné celé číslo voláme *Mihálovo*, ak každá dvojica susedných cifier je deliteľná buď číslom 19, alebo 21 (napríklad 7638 je *Mihálovo* číslo, lebo 76 je násobok čísla 19, 63 je násobok čísla 21 a 38 je násobok čísla 19). Koľko 2025-ciferných *Mihálových* čísel existuje?

2. Majme kladné celé čísla  $1 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2025}$ . Pre  $i \in \{1, 2, \dots, 2025\}$  definujme

$$m_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Najviac koľko z čísel  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2025}$  môže byť celých?

3. V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  je  $Q$  päta výšky z vrcholu  $C$  na preponu  $AB$ . Polomery kružníc vpísaných do trojuholníkov  $ABC$ ,  $AQC$  a  $QBC$  označme zaradom  $r, r_1, r_2$ . Dokážte, že  $|CQ| = r_1 + r_2 + r$ .
4. Nech  $k$  je kružnica s celočíselným polomerom  $r$ , vo vnútri ktorej sa nachádza  $4r$  úsečiek dĺžky 1. Daná je priamka  $p$ . Dokážte, že existuje priamka  $p'$  rovnobežná s  $p$  alebo kolmá na  $p$  taká, že  $p'$  pretína aspoň 2 z daných úsečiek dĺžky 1.
5. Nájdite všetky usporiadané desiatice reálnych čísel  $(x_1, \dots, x_{10})$  také, že

$$x_i = 1 + \frac{6x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2}$$

pre všetky  $i \in \{1, \dots, 10\}$ .

6. Majme nekonečnú štvorcovú mriežku s  $n$  zafarbenými políčkami. V každom kroku sa pre každé políčko pozrieme na farbu samotného políčka, políčka hneď hore a políčka hneď vpravo. Ak sú aspoň dve z týchto troch políčok zafarbené, v ďalšom kroku bude toto políčko zafarbené, inak biele. Ukážte, že mriežka bude celá biela
  - a. po konečnom počte krokov,
  - b. po najviac  $2n$  krokoch,
  - c. po najviac  $n$  krokoch.

# 2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **28. apríla 2025**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke [seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf).

1. Majme ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s najdlhšou stranou  $AC$ . Zostrojte na tejto strane bod  $D$  taký, že os uhla  $ADB$  bude rovnobežná so stranou  $BC$ . Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.
2. Martin a Robka hrajú hru v tabuľke  $1 \times 2025$ . Martin si najprv na papier napíše niekoľko kladných celých čísel. Robka vloží mincu do jedného z políčok. V každom ťahu si Martin vyberie číslo, ktoré má napísané na papieri – o toľko políčok sa pokúsi Robka posunúť mincu buď doľava, alebo doprava (podľa svojho rozhodnutia, ale ak je možné mincu presunúť, presunie ju, inak ostáva na nezmenenej pozícii). Koľko najmenej čísel si Martin musí napísať na papier, aby vedel zaistiť, že minca navštívi všetky políčka bez ohľadu na to, akým spôsobom hrá Robka?
3. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla  $n$  platí, že počet deliteľov čísla  $n$  končiacich cifrou 1 alebo 9 je rovnaký alebo väčší ako počet deliteľov čísla  $n$  končiacich cifrou 3 alebo 7.
4. Pre každé kladné celé číslo  $k$  väčšie ako 1 nech  $p(k)$  je najväčší prvočíselný deliteľ čísla  $k$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel  $n$  väčších ako 2 takých, že

$$(p(n+1) - p(n))(p(n) - p(n-1)) > 0.$$

5. Nech  $k$  je pevná kružnica so stredom  $S$  a polomerom  $r$ . Nech  $B$  a  $C$  sú dva rôzne pevné body na  $k$ . Nech  $A$  je pohyblivý bod na  $k$ , odlišný od  $B$  a  $C$ . Nech  $P$  je bod taký, že stred úsečky  $SP$  je  $A$ . Priamka prechádzajúca bodom  $S$  a rovnobežná s priamkou  $AB$  pretína priamku prechádzajúcu bodom  $P$  a rovnobežnú s priamkou  $AC$  v bode  $D$ .
  - a. Dokážte, že keď sa bod  $A$  pohybuje po kružnici  $k$  (okrem bodov  $B$  a  $C$ ), bod  $D$  leží na pevnej kružnici, ktorej polomer je väčší alebo rovný  $r$ .
  - b. Dokážte, že rovnosť v časti a. nastane práve vtedy, keď je úsečka  $BC$  priemerom kružnice  $k$ .
6. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla  $x < y$  platí

$$\frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}} > \frac{y!}{x!(y-x)!} > \frac{y^y}{x^x(y-x)^{(y-x)}(y+1)}.$$

<b>Názov:</b>	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Február 2025 • Letný semester 49. ročníka (2024/2025)
<b>Web:</b>	<a href="http://seminar.strom.sk">seminar.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:seminar.strom@strom.sk">seminar.strom@strom.sk</a>
<b>Riešenia:</b>	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese <a href="mailto:riesenia.strom@strom.sk">riesenia.strom@strom.sk</a> .
<b>Vydáva:</b>	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
<b>Web:</b>	<a href="http://zdruzenie.strom.sk">zdruzenie.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:info@strom.sk">info@strom.sk</a>