

2. ÚLOHA

Opravovali: **Kalista Semancová & Michal "Il'o" Il'kovič**

Najkrajšie riešenia: **Richard Semanišin & Viktoria Boyko**

Počet riešení: **62**

ZADANIE

Paša pre ovce je štvorčeková mriežka v tvare obdĺžnika. Ovce sú v štvorčekovej mriežke umiestnené tak, že v každom štvorčeku sa nachádza najviac jedna ovca. Všetky riadky majú navzájom rôzny počet oviec a taktiež všetky stĺpce majú navzájom rôzny počet oviec. Strany paše môžu mať rovnakú dĺžku. Koľko rôznych takýchto ohrád existuje, ak obe strany ohrady majú dĺžku aspoň 10 a najviac 20?

Pozn.: Pašu s 10 riadkami a 20 stĺpcami považujeme za inú než pašu s 20 riadkami a 10 stĺpcami.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Ukážme najprv všetky ohrady, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania a potom dokážme, že iné rozmery ohrád nevyhovujú. Všimnime si, že ak máme štvorcovú ohradu, tak vieme ovce na paši (na obrázkoch označené ako X) umiestniť do tvaru schodov takým spôsobom, že v prvom riadku bude iba jedna ovca, v druhom dve, až v poslednom riadku budú ovce v každom štvorčeku a rovnako aj pre stĺpce. Takto zaručíme, že v každých dvoch riadkoch bude iný počet oviec a takisto v každých dvoch stĺpcoch bude iný počet oviec. Ďalej si všimnime, že ak na koniec paše pridáme jeden riadok alebo stĺpec bez oviec, tak bude ohrada stále vyhovovať zadaniu.

X										
X	X									
X	X	X								
X	X	X	X							
X	X	X	X	X						
X	X	X	X	X	X					
X	X	X	X	X	X	X				
X	X	X	X	X	X	X	X			
X	X	X	X	X	X	X	X	X		
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

Ohrada 10 × 10

X										
X	X									
X	X	X								
X	X	X	X							
X	X	X	X	X						
X	X	X	X	X	X					
X	X	X	X	X	X	X				
X	X	X	X	X	X	X	X			
X	X	X	X	X	X	X	X	X		
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

Ohrada 10 × 11

Štvorcových ohrád je 11 a k 10 z nich vieme pridať buď prázdny riadok alebo stĺpec (k ohrade s 20 riadkami aj stĺpcami jedinej nevieme), čo je 20 ďalších ohrád. Dokopy to je $11 + 20 = 31$ ohrád. Je dôležité poznamenať, že to sú práve tie ohrady, kde sa počet riadkov a stĺpcov líši najviac o 1.

Teraz ešte musíme ukázať, že iné ohrady nespĺňajú podmienky zo zadania. Nech je počet riadkov n a počet stĺpcov m . V každom z n riadkov môže byť najmenej 0 oviec a najviac m oviec. To je dokopy $m + 1$ možných počtov oviec v nejakom riadku. Keďže ale každý riadok musí mať iný počet oviec, tak sa môže každý z $m + 1$ počtov oviec vyskytovať v najviac jednom riadku. Teda riadkov môže byť najviac o jeden viac ako stĺpcov. Zároveň z toho istého dôvodu môže byť stĺpcov najviac o jeden viac ako riadkov. To spolu znamená, že sa počet riadkov a stĺpcov môže líšiť najviac o 1, čo sme chceli dokázať.

KOMENTÁR

Kľúčové v úlohe bolo dokázať, že počet riadkov a stĺpcov sa líši najviac o 1. To bolo v podstate dôsledkom Dirichletovho princípu, o ktorom sa viac môžete dočítať napríklad *tu*. Zároveň veľa z vás zabudlo spomenúť, že každú z 31 ohrád naozaj vieme vyplniť ovcami podľa zadania, za čo sme museli sťahovať body, pretože bez toho si nemôžete byť istý, či výsledok nemôže byť menší.