

3. ÚLOHA

Opravovali: **Nina Anna Betáková** & **Tomáš Sukel** & **Sophia Sotáková**

Najkrajšie riešenia: **Matúš Varhoľák** & **Hana Lascáková**

Počet riešení: **65**

ZADANIE

Maťo sa rozhodol, že sa zúčastní turnaja v pití zínčice, ktorý prebieha tak, že každý bača hrá presne raz proti každému inému bačovi. Po skončení turnaja sú bačovia zoradení na základe počtu získaných bodov, ktoré sa pridelujú nasledovne: 3 body za víťazstvo, 1 bod za remízu a 0 bodov za prehru. Je možné, že každý (okrem posledného) má presne o 2 body viac ako bača umiestnený za ním, ak sa turnaja zúčastní:

- šesť bačov,
- päť bačov?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Rozoberme si najskôr prípad, kde hrá 6 bačov. Najskôr zistíme, koľko zápasov sa odohrá dokopy. Prvý hrá 5 hier s ostatnými bačami, druhý hrá už len 4 hry, ktoré sú iné ako s prvým bačom, tretí hrá 3 iné hry okrem hry s prvým a druhým bačom, štvrtý už len 2 iné hry a piaty už len 1 inú hru a všetky hry, ktoré odohral šiesty bača sme už započítali pri ostatných bačoch. Teda počet hier je $5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$. V každom zápase sa môžu medzi bačov rozdeliť dokopy buď 2 body (pri remíze – každý 1 bod), alebo 3 body (pri výhre – víťaz 3 body, porazený 0). Ak by všetky zápasy skončili remízou, rozdelilo by sa spolu 30 bodov (15×2) a ak by všetky zápasy skončili výhrou jedného baču, rozdelilo by sa 45 bodov (15×3). Preto platí, že celkový počet bodov bude v rozmedzí od 30 do 45.

Povedzme, že posledný (šiesty) získal niekoľko bodov, potom piaty získal o 2 body viac, štvrtý o 4, tretí o 6, druhý o 8 a prvý o 10 bodov viac. Celkový počet získaných bodov všetkých šiestich bačov môže byť:

42 bodov (12, 10, 8, 6, 4, 2), 36 bodov (11, 9, 7, 5, 3, 1) alebo 30 bodov (10, 8, 6, 4, 2, 0).

Pozrime sa napríklad na možnosť, kde prvý bača bude mať 12 bodov. Takýto turnaj sa vie odohrať nasledovne:

Bača	A	B	C	D	E	F	Počet získaných bodov
A		0	3	3	3	3	12
B	3		0	3	3	1	10
C	0	3		3	1	1	8
D	0	0	0		3	3	6
E	0	0	1	0		3	4
F	0	1	1	0	0		2

V riadku s písmenom A sú body, ktoré získal bača A v zápase proti bačovi, ktorý označuje stĺpec. Rovnako to platí pre riadok s písmenom B,C,...

Pre 6 bačov sme teda našli možné rozloženie hier tak, aby sa turnaj vedel odohrať podľa zadania.

Teraz sa pozrime na prípad, kde hrá 5 bačov. Keďže každý bača hrá s každým, odohrá sa 10 zápasov (rovnaký princíp ako pri šiestich bačoch). Pri samých remízach by bolo 20 (10×2) bodov a pri samých výhrach 30 (10×3) bodov. Celkový počet bodov bude teda v tomto rozmedzí.

Posledný (piaty) má niekoľko bodov, štvrtý o 2 viac, tretí o 4, druhý o 6 a prvý o 8. Celkový počet bodov všetkých piatich bačov môže byť:

20 bodov (8, 6, 4, 2, 0), 25 bodov (9, 7, 5, 3, 1) alebo 30 bodov (10, 8, 6, 4, 2).

Pozrime sa na tieto tri prípady osobitne:

Ak by bol celkový počet bodov, ktorý bačovia získajú 20, posledný bača by mal 0 bodov. To znamená, že s každým ďalším bačom musel prehrať, čiže každý bača okrem neho má aspoň 3 body za výhru. Vieme ale, že predposledný bača má 2 body, čo je menej ako 3, takže táto možnosť nastat' nemôže.

Teraz sa pozrime na prípad, že by celkový počet bodov, ktoré bačovia získajú bol 25. Označme si bačov A, B, C, D, E a predpokladajme, že sa v takomto poradí aj umiestnili (A prvý, B druhý, ...). Rozpíšme si, koľkokrát mohol ktorý bača vyhrať, prehrať a remizovať podľa počtu bodov, ktoré získal:

Bača	Poč. výhier	Poč. remíz	Poč. prehíer	Poč. získaných bodov
A	3	0	1	9
B	2	1	1	7
C	1	2	1	5
D	1	0	3	3
	0	3	1	
E	0	1	3	1
Spolu	7 alebo 6	4 alebo 7	9 alebo 7	

Pre baču D máme dve možnosti, ako mohol skončiť. Na to, aby bola možnosť platná, musí platiť, že celkový počet remíz je párne číslo, keďže pri každej remíze remizujú dvaja bačovia a tiež celkový počet prehíer musí byť rovnaký, ako celkový počet výhier. V oboch prípadoch pre baču D ale vidíme, že celkový počet výhier sa nerovná celkovému počtu prehíer. Táto možnosť preto tiež nemôže nastať.

Pozrime sa ešte na prípad, že by celkový počet bodov, ktoré bačovia získajú bol 30. Keď sme zisťovali, v akom rozmedzí bude ležať celkový počet bodov, tak túto hranicu sme dostali tak, že každá hra skončí výhrou jedného baču (ani jedna hra neskončí remízou). Zároveň ale chceme, aby mal bača, ktorý vyhral celý turnaj 10 bodov. Na to, aby dosiahol tento počet bodov potrebuje ale trikrát vyhrať a raz remizovať (číslo 10 nevieme dostať ako súčet trojok a núl). Z toho vyplýva, že táto možnosť tiež nemôže nastať.

Preto nemôže pre 5 bačov skončiť turnaj takým spôsobom, aký je popísaný v zadaní.

KOMENTÁR

Väčšine z vás sa podarilo správne nájsť odpovede na otázky zo zadania. Čo ste ale vo viacerých riešeniach nespomenuli pri časti a., bolo konkrétne rozloženie hier, ktoré skončili výhrou jedného baču a hier, ktoré skončili remízou. To je pri úlohách tohto typu potrebné. Ak totiž nenájdete konkrétny prípad, ktorý vyhovuje podmienkam, tak si nemôžete byť istí, či neexistuje nejaký ďalší dôvod, prečo by riešenie nevyhovovalo.

Niektorí ste presne z tohto dôvodu došli k záveru, že pre 5 bačov sa dá odohrať popísaný turnaj. Ak by ste hľadali takéto konkrétne rozloženie hier, zistili by ste, že neexistuje.

Niektorí ste nepochopili správne to, že posledný bača nemá o 2 body viac ako bača umiestnený za ním. Toto upresnenie je v zadaní len preto, že za posledným bačom už nie je v poradí žiadny bača a teda nemá od koho mať o 2 body viac. Stále ale platí, že predposledný bača má presne o 2 body viac ako posledný. Preto musí mať posledný bača presne o 2 body menej ako predposledný.