4. ÚLOHA

Opravovali: **Martin "Iskra" Dudjak** & **Samo Šandor**

Najkrajšie riešenie: **Viktoriia Boyko**

Počet riešení: **54**

ZADANIE

Bačovia Maťo, Mišo a Rišo vyryli do stola druhé mocniny: 1, 4, 9 ... 2025, spočítali ich súčet a zistili, že je deliteľný číslom 3. Potom sa dohodli, že si zahrajú nasledujúcu hru: v každom kole Maťo vyškrtne jedno číslo, potom Mišo a potom Rišo. Toto bude pokračovať, pokým nevyškrtnú všetky čísla. Rišovým cieľom je dosiahnuť, aby súčet nevyškrtnutých čísel na konci každého kola bol deliteľný 3. Ukážte, že:

a. Maťo nevie zabrániť Rišovi v dosiahnutí svojho cieľa, ak Mišo Rišovi pomáha,

b. Mišo vie zastaviť Riša v dosiahnutí svojho cieľa aj v prípade, že Maťo pomáha Rišovi.

Pozn.: To, že niekto pomáha Rišovi, znamená, že ten človek chce, aby Rišo splnil svoj cieľ.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Najskôr si uvedomme, že na stole sú druhé mocniny od 1^2 po 45^2, čo je spolu 45 čísel. Keďže nás zaujíma deliteľnosť trojkou po odčítavaní (vyškrtávaní) niektorých čísel, pozrieme sa na zvyšky čísel po delení troma. Medzi číslami od 1 po 45 dáva zvyšok 0 po delení troma práve 15 čísel (čísla $3, 6, \cdots, 42, 45$), rovnako zvyšok 1 po delení troma dáva 15 čísel (čísla $1, 4, \cdots, 40, 43$) a zvyšok 2 po delení troma dáva takisto 15 čísel (čísla $2, 5, \cdots, 41, 44$).

Nami skúmané čísla na tabuli sú však druhé mocniny, čo je pre nás veľmi výhodné, keďže zvyšky (nielen) druhých mocnín po delení sa správajú pekne – konkrétne tak, že po delení druhej mocniny môžeme dostať iba niektoré zvyšky. Preskúmajme teraz, aké zvyšky môžu dávať druhé mocniny po delení troma. Každé prirodzené číslo dáva zvyšok buď 0, 1, alebo 2, teda všetky prirodzené čísla si pre nezáporné celé k vieme zapísať ako $3k$, $3k + 1$, alebo $3k + 2$. Pozrime sa, aké zvyšky budú dávať druhé mocniny takto zapísaných čísel:

- Ak $n = 3k$, tak $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$, čo dáva zvyšok 0 po delení troma.
- Ak $n = 3k + 1$, tak $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$, čo dáva zvyšok 1 po delení troma.
- Ak $n = 3k+2$, tak $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 9k^2+12k+3+1 = 3\cdot(3k^2+4k+1)+1$, čo dáva tiež zvyšok 1 po delení troma.

Vidíme, že 15 druhých mocnín na stole dáva zvyšok 0 po delení troma a 30 druhých mocnín na stole dáva zvyšok 1 po delení troma. Prejdime teraz k riešeniu jednotlivých častí úlohy.

a. Potrebujeme dokázať, že bez ohľadu na to, aké číslo Maťo vyberie, dokážu vždy Mišo a Rišo k nemu vybrať také čísla, že po odčítaní všetkých troch čísel od pôvodného súčtu, bude aj nový súčet deliteľný troma. Odtiaľ nám teda vychádza, že aj súčet týchto troch vyškrtnutých čísel (keďže jedno kolo si môžeme predstaviť ako odčítanie súčtu Maťovho, Mišovho a Rišovho čísla od súčtu čísel na stole) musí byť deliteľný troma, keďže začíname so súčtom deliteľným troma.

   Pokiaľ by Maťo vybral číslo so zvyškom 0, potom aj Mišo aj Rišo môžu vybrať číslo so zvyškom 0, čo zabezpečí, že súčet zvyškov týchto čísel bude taktiež 0, teda súčet týchto čísel bude deliteľný troma.

   Pokiaľ by Maťo vybral číslo so zvyškom 1, potom aj Mišo aj Rišo môžu vybrať číslo so zvyškom 1, takže bude súčet týchto čísel dávať zvyšok $1 + 1 + 1 = 3$, čo je deliteľné troma.

Keďže aj počet čísel so zvyškom 0 (15), aj so zvyškom 1 (30) na tabuli je deliteľný troma a v každom kole nám pri dodržaní tohto postupu z tabule ubudnú práve tri čísla z niektorého zvyšku, potom Mišo a Rišo budú stále mať na stole čísla s vyhovujúcim zvyškom na zmazanie pre akýkoľvek Maťov výber, a to až kým zo stola nezmiznú všetky čísla. Tým sme ukázali stratégiu pre Miša a Riša, ako môžu dosiahnuť, že súčet čísel na stole bude na konci každého kola deliteľný troma a teda splniť Rišov cieľ.

b. Potrebujeme ukázať, že bez ohľadu na to, aké číslo si vyberie Maťo, vie Mišo spraviť taký výber čísla, že potom už Rišo nedokáže vybrať také číslo, aby po odčítaní týchto troch čísel ostal súčet na stole deliteľný troma.

Ak Maťo vyberie číslo so zvyškom 0, potom Mišo môže vybrať číslo so zvyškom 1. Vidíme, že bez ohľadu na to, aké číslo s akým zvyškom Rišo vyberie, už nedokáže zabezpečiť, aby bol súčet týchto troch vyškrtnutých čísel deliteľný troma – buď bude dávať zvyšok 0 + 1 + 0 = 1 alebo 0 + 1 + 1 = 2.

Ak Maťo vyberie číslo so zvyškom 1, potom Mišo môže vybrať číslo so zvyškom 0. Vidíme, že bez ohľadu na to, aké číslo s akým zvyškom Rišo vyberie, už nedokáže zabezpečiť, aby bol súčet týchto troch vyškrtnutých čísel deliteľný troma – buď bude dávať zvyšok 1 + 0 + 0 = 1 alebo 1 + 0 + 1 = 2

Keďže na začiatku je súčet čísel na stole deliteľný troma a už v prvom kole dokáže Mišo zabezpečiť, aby sa od tohto súčtu odčítalo číslo, ktoré nebude deliteľné troma, potom už na konci prvého kola nebude súčet nevyškrtnutých čísel deliteľný troma. Teda Mišo vie zabrániť Rišovi v dosiahnutí jeho cieľa.

KOMENTÁR

Väčšine z vás sa podarilo dokázať tvrdenia zo zadania. Najväčším kameňom úrazu úlohy bolo, že ste niektorí nedostatočne alebo vôbec nedokázali, že druhé mocniny majú po delení tromi zvyšky iba 0 alebo 1[1]. To bola najdôležitejšia časť úlohy, a preto sme boli nútení vám za chýbajúci dôkaz strhnúť pomerne veľký počet bodov. Druhou chybou bolo, že ste neukázali, že Mišo a Rišo budú v podúlohe a. vždy môcť vyškrtnúť číslo s rovnakým zvyškom ako Maťo, t.j. že sa nestane, že by Maťo v nejakom kole hry vybral číslo s nejakým zvyškom a Mišo s Rišom by nemali čo vyškrtnúť.

[1] Záujemcovia si o *kvadratických* zvyškoch, čo je užitočná teória zovšeobecňujúca úvahy popísané v tomto vzoráku, môžu viac prečítať napr. tu