

5. ÚLOHA

Opravovali: **Ondrej Králik & Oliver Seman**

Najkrajšie riešenie: **Filip Saxa**

Počet riešení: **47**

ZADANIE

Rišo sa rozhodol ozdobiť kruhovú koziu ohradu tak, že okolo nej napíše čísla. Pre jedinečnosť si ale stanovil dve podmienky:

- ak sú dve čísla v kruhu susedné, potom jedno je násobkom druhého,
- ak dve čísla nie sú susedné, tak potom ani jedno nie je násobkom toho druhého.

Mohol takto napísať čísla, ak ich napísal

- 2026,
- 2025?

VZOROVÉ RIEŠENIE

- Rišo mohol takto napísať 2026 čísel. Očíslujme si čísla okolo kruhu ako 1. až 2026. číslo. Keďže čísel je párny počet, tak každé číslo na párnej pozícii susedí len s číslami na nepárnych pozíciách. Umiestnime preto na všetky nepárne pozície prvočísla 2, 3, 5, 7, 11, ... až po 1013. prvočísla. Na každú párnu pozíciu umiestnime súčin jej dvoch susedov, teda 2. číslo bude $2 \cdot 3 = 6$, 4. číslo bude $3 \cdot 5 = 15$, 6. číslo bude $5 \cdot 7 = 35$ a podobne až po 2026. číslo, ktoré bude súčinom 1. čísla a 2025. čísla.

Všimnime si, že teraz platia obidve podmienky zo zadania. Z každých dvoch susedných čísel je jedno na párnej pozícii a jedno na nepárnej pozícii. Preto jedno z týchto čísel, konkrétne to na párnej pozícii, je nutne násobkom toho druhého, ktoré je na nepárnej pozícii. Ďalej vidíme, že každé číslo na párnej pozícii je súčinom dvoch susedných prvočísel, preto ho nemôže deliť ani nemôže byť jeho násobkom

žiadne ďalšie číslo v kruhu. Ostatné prvočísla ho totiž nedelia a zvyšné čísla na párnych pozíciách vznikajú súčinom dvoch prvočísel, z ktorých aspoň jedno je odlišné. Na nepárnych pozíciách sú len prvočísla, tie sa preto tiež nemôžu navzájom deliť.

- b. Tu nemôžeme použiť rovnakú stratégiu ako v prvej podúlohe. Čísel je totiž nepárny počet, a tak číslo na 1. pozícii má suseda číslo na 2025. pozícii.

Všimnime si, že keď niektoré číslo je menšie ako jeho pravý sused, teda tento sused je jeho násobok, tak jeho ľavý sused musí byť väčší než toto číslo. Ak by bol menší, teda stredné číslo by bolo jeho násobok, tak máme tri čísla vedľa seba, z ktorých to stredné je násobok toho ľavého a to pravé je násobok toho stredného. To znamená, že aj to pravé je násobok toho ľavého, čo podľa zadania nesmie nastať, keďže nie sú vedľa seba.

Ak naopak niektoré číslo je väčšie než jeho pravý sused, tak musí byť aj väčšie než jeho ľavý sused. V opačnom prípade by sme totiž mali znova tri čísla, z ktorých by stredné bolo násobok pravého a ľavé násobok stredného, teda ľavé číslo by bolo násobok pravého.

Z toho zisťujeme, že sa musí do kruhu striedať, či momentálne číslo delí svojho pravého suseda, alebo či je jeho násobkom. Ak by ale číslo na 1. pozícii bolo násobkom svojho pravého suseda (2. čísla), tak by aj číslo na 2025. pozícii muselo byť násobkom 1. čísla, teda aj násobkom 2. čísla, čo nesmie. Ak by naopak číslo na 1. pozícii bolo menšie ako číslo na 2. pozícii, teda by bolo jeho deliteľom, tak by aj číslo na 2025. pozícii bolo menšie ako číslo na 1. pozícii, teda by bolo deliteľom 1. čísla, a preto aj 2. čísla, čo opäť nesmie. Tým zisťujeme, že Rišo nevie takto zapísať čísla do kruhu, ak ich zapísal 2025.

KOMENTÁR

Väčšina z vás zvládla pekne vyriešiť aspoň jednu podúlohu. Najčastejšou chybou bolo to, že ste len povedali, že riešenie pre 2026 čísel nefunguje pre 2025 čísel, ale nedokázali ste, prečo žiadne iné rozmiestnenie nevyhovuje. Druhou častou chybou bolo, že ste ukázali, prečo Rišo nemohol napísať 2025 čísel, ale neukázali ste konkrétne rozmiestnenie pre 2026 čísel. Ako potom vieme, že Rišo takto vedel rozmiestniť čísla a že nenájdeme iný dôvod, prečo sa to nedá?