

6. ÚLOHA

Opravovali: **Oskar Hritz & Richard Vodička**

Najkrajšie riešenie: **Viktorija Boyko**

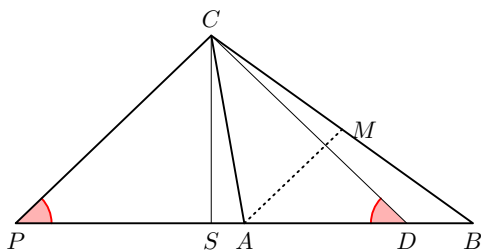
Počet riešení: **38**

ZADANIE

Na Mišovom klobúku v tvare trojuholníka ABC je na strane AB vyznačený bod D (rôzny od A a B). Bod M je stred strany BC . Vieme, že $2 \cdot |AM| = |CD|$. Je trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý? Dokážte.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Predĺžme si úsečku AB za bod A a vyznačme na nej bod P tak, aby platilo $|PA| = |AB|$. Dokreslime si aj úsečku CP .



Teraz vidíme, že úsečka AM je v trojuholníku PBC spojnicou stredov dvoch jeho strán. Inými slovami, táto úsečka je jeho strednou pričkou. Platí teda, že PC je rovnobežná s AM a zároveň $|PC| = 2 \cdot |AM|$, čo je zo zadania to isté ako $|CD|$. Kvôli tejto rovnosti je trojuholník PCD rovnoramenný so základňou PD .

Dokreslime si ešte výšku v trojuholníku PCD na stranu PD a jej päťu si označme S . Keďže je trojuholník PCD rovnoramenný, tak výška na základňu je zároveň osou strany PD , takže S leží v strede strany PD . Keďže bod D sa nachádza

vnútri strany AB , tak určite platí $|PD| < |PB|$, z čoho po vydelení 2 dostávame $\frac{|PD|}{2} < \frac{|PB|}{2}$, čo je to isté ako $|PS| < |PA|$. Bod S tak nutne leží mimo trojuholníka ABC .

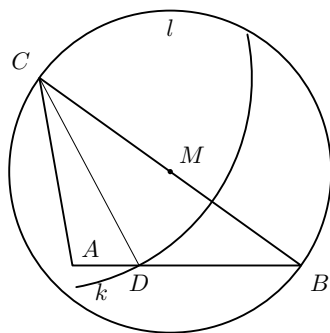
Uhol BAC teraz vieme vyjadriť ako $180^\circ - |\sphericalangle SAC|$. Keďže v trojuholníku je súčet veľkostí vnútorných uhlov 180° , tak z trojuholníka SAC máme $|\sphericalangle SAC| = 180^\circ - |\sphericalangle SCA| - |\sphericalangle CSA|$. Vieme, že $|\sphericalangle CSA| = 90^\circ$, teda spolu dostávame:

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| = 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle SCA| - 90^\circ) = 90^\circ + |\sphericalangle SCA|$$

Keďže veľkosť uhla SCA je určite nejaké kladné číslo, tak $|\sphericalangle BAC| > 90^\circ$, preto je to tupý uhol a trojuholník ABC musí byť tupouhlý.

INÉ RIEŠENIE

Nakreslime si do obrázku dve kružnice. Kružnicu k so stredom v C a polomerom $|CD|$ a kružnicu l so stredom v M a polomerom $|CM| = |MB|$.



Úlohu si rozdelíme na 3 možnosti:

1. Ak $|CD| > |CB|$, dĺžka $|CA|$ je kvôli trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku AMC kratšia ako súčet $|CM| + |MA|$, ktorý je vďaka podmienke zo zadania rovný $\frac{|CB|}{2} + \frac{|CD|}{2}$, čo je menej ako $|CD|$, lebo platí $|CD| > |CB|$. Z $|CD| > |CA|$ a $|CD| > |CB|$ vieme, že body A a B sú vo vnútri kruhu ohraničenom kružnicou k . Všetky body úsečky AB sa preto tiež nachádzajú vo vnútri tohto kruhu. Bod D sa musí nachádzať aj na úsečke AB , aj na k , čo nemôže nastať.

2. Ak $|CD| = |CB| = 2|AM|$, tak sú nutne úsečky AM, MB, CM rovnako dlhé, a preto sú polomermi kružnice l . Z vety o Tálesovej kružnici potom nutne vyplýva, že máme pravý uhol pri vrchole A . Dokreslime si bod B' osovou súmernosťou z bodu B cez os AC . Nutne sú uhly $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAB'| = 90^\circ$, teda $B'AB$ ležia na jednej úsečke a zároveň $|CB| = |CB'|$ z osovej súmernosti. Zároveň ale $|CD| = |CB| = |CB'|$, teda vrchol B aj bod B' ležia na kružnici k .

Jedna kružnica môže jednu úsečku preťať najviac dvakrát, ale k preťalo úsečku BB' už trikrát (v B, D, B'), čiže musia niektoré z týchto bodov byť rovnaké. Zo zadania ale $D \neq B$ a B' je mimo úsečky AB , teda jedine by mohli splynúť body B, B' . To by ale znamenalo, že B pôvodne ležalo na osi súmernosti AC , ale potom by ABC nebol trojuholník, preto nemôže táto možnosť nastať.

3. Ostáva nám tretia možnosť, ak $|CD| < |CB|$. Nutne $|AM| = \frac{|CD|}{2} < \frac{|CB|}{2} = |CM|$, teda A sa nachádza vo vnútri kruhu ohraničenom kružnicou l . Z vety o Tálesovej kružnici tak vieme, že pri A je určite tupý uhol.

Trojuholník ABC teda musí byť tupouhlý.

KOMENTÁR

Táto úloha bola náročná, o čom svedčí aj malý počet 9-bodových riešení, z ktorých však každé postupovalo originálnym spôsobom. Napriek náročnosti sme však dostali slušný počet riešení, čo nás teší. Najčastejšou chybou bolo, že ste sa úlohu snažili dokázať narysovaním. Rysovanie je užitočný spôsob ako si niečo uvedomiť, avšak na dokazovanie to nestačí. To by sme museli narysovať, každý jeden možný trojuholník, ktorých je samozrejme nekonečne veľa.