

5. ÚLOHA

Opravovali: **Martin "Iskra" Dudjak & Sarah Klopstock**

Najkrajšie riešenie: **Viktoriia Boyko**

Počet riešení: **42**

ZADANIE

V hrnci je desaťtisíc halušiek a dve sú na tanieri. Bačovia Rišo a Mišo hrajú nasledujúcu hru: striedavo vykonávajú ťahy, pričom Rišo začína. V každom ťahu si bača zvolí skutočný deliteľ počtu halušiek na tanieri (deliteľ menší ako počet halušiek) a toľko halušiek pridá na tanier. Hra sa končí, ak je na tanieri 2025 alebo viac halušiek. Vyhráva ten, kto urobil posledný ťah. Ktorý z bačov má víťaznú stratégiu? Víťazná stratégia je postup, podľa ktorého keď hrá jeden hráč, tak vyhrá bez ohľadu na ťahy súpera.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Ak posunie Rišo Mišovi nepárny počet halušiek, Mišo mu musí vrátiť párný počet halušiek. Nepárne číslo má iba nepárne delitele (tým, že je nepárne, ho nedelí 2, a tak ani žiadne iné párne číslo), takže Mišo pridá nepárny počet halušiek, čím bude na tanieri párný počet halušiek. Vidíme, že Rišo vie zabezpečiť, aby bol vždy na začiatku jeho ťahu na tanieri párný počet halušiek. Pridaním jednej halušky vie Mišovi vždy posunúť nepárny počet halušiek. Rišo vie vyhrať v momente, keď má na začiatku svojho ťahu párný počet halušiek, ktorý je aspoň 1350, pretože pridaním polovice dosiahne najmenej $1350 + 675 = 2025$, čo už stačí na výhru.

Pozrime sa teraz na to, prečo pri tejto Rišovej stratégii Mišo nemôže vyhrať. Mišo môže pri nepárnom čísle n pridať najviac $\frac{n}{3}$, čiže sa môže dostať najviac na $\frac{4}{3}n$. Aby takto dosiahol aspoň 2025 halušiek, musel by mať na začiatku svojho ťahu aspoň $n = 1519$, no keďže n musí byť deliteľné tromi, najbližšie možné n je 1521. To sa však Mišovi nemôže stať, pretože ak dostane na začiatku ťahu nepárne číslo n , predtým mal Rišo na tanieri $n - 1$

halušiek. Keby však platilo $n - 1 \geq 1350$, čiže $n \geq 1351$, Rišo by v danom ťahu už mohol okamžite vyhrať pridaním polovice, a teda by Mišovi takýto veľký počet halušiek nikdy neodovzdal. Mišo teda nikdy nezačne svoj ťah s viac než 1350 haluškami, a preto sa nemôže dostať na 1521 potrebných na výhru.

Rišo hrá podľa nasledujúcej stratégie: ak na začiatku svojho ťahu nemôže okamžite vyhrať, pridá na tanier 1 halušku. Ak môže okamžite vyhrať, pridá najväčší skutočný deliteľ aktuálneho počtu halušiek (pri párnom počte teda presne polovicu) a tým hru ukončí. Keďže číslo 1 je skutočný deliteľ každého kladného celého čísla, vie Rišo túto stratégiu použiť vždy. Z uvedeného vyplýva, že Mišo nemá ako vyhrať, zatiaľ čo Rišo pri svojej stratégii skôr či neskôr dosiahne situáciu, v ktorej môže hru ukončiť. Rišova stratégia je teda vždy víťazná.

KOMENTÁR

Ak popisujete riešenie úlohy, kde má jeden hráč výhernú stratégiu, je potrebné ukázať, že bude fungovať vždy, bez ohľadu na ťahy jeho súpera, a nie len popísať jeden konkrétny prípad. Takému riešeniu nemôžeme udeliť veľa bodov, pretože nepopisuje všeobecné myšlienky potrebné pre správne vyriešenie úlohy.