4. ÚLOHA

Opravovali: **Taly Poliačiková** & **Tomáš Lang**

Najkrajšie riešenia: **Viktória Kováčiková** & **Filip Földes**

Počet riešení: **58**

ZADANIE

Tri tímy hrajú hru a zabudli, aký majú počet bodov, pamätajú si len tieto tvrdenia o ich počte bodov:

- Prvý tím: „Počet bodov má nepárny ciferný súčet, párny ciferný súčin, a ak k nemu pripočítame 1, tieto dve vlastnosti sa nezmenia."
- Druhý tím: „Počet bodov má párny ciferný súčet, párny ciferný súčin, a ak k nemu pripočítame 1, tieto dve vlastnosti sa nezmenia."
- Tretí tím: „Počet bodov má párny ciferný súčet, nepárny ciferný súčin, a ak k nemu pripočítame 1, tieto dve vlastnosti sa nezmenia."

Zistite, aký najmenší počet bodov môže mať každý z tímov, alebo dokážte, že taký počet bodov neexistuje.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Pre vyriešenie tejto úlohy sa musíme pozrieť na vlastnosť čísel, ktorú nazývame parita (parita nám hovorí o tom, či sú čísla párne alebo nepárne). Konkrétne nás zaujíma parita ciferného súčtu a ciferného súčinu.

Najprv sa pozrime na body prvého tímu:

Skúsme si uvedomiť, kedy sa po pripočítaní 1 nezmení parita ciferného súčtu. Parita ciferného súčtu čísel, ktoré majú na mieste jednotiek cifry 0 až 8, sa mení vždy, keď ku číslu pripočítame 1. Je to preto, lebo sa jeho posledná cifra zväčší o 1, čím sa zmení parita danej cifry, a teda aj parita ciferného súčtu čísla.

Ak by sme však mali číslo s cifrou 9 na mieste jednotiek, po pripočítaní 1 by sa uplatnil prechod cez desiatku, čím sa nám určite zmenia aspoň dve cifry, a tak môže v niektorých prípadoch parita čísla ostať rovnaká (pozor, neplatí to pri každom prechode cez desiatku – napríklad číslo 99 má párny ciferný súčet, ale číslo po pripočítaní 1, teda 100, už má nepárny ciferný súčet). Ako funguje zachovanie parity ciferného súčtu pri prechode cez desiatku, si môžeme ukázať na zopár príkladoch:

$9 = 9 \rightarrow$ nepárne $\qquad 9 \cdot 1 = 9 \rightarrow$ nepárne

$10 \rightarrow 1 + 0 = 1 \rightarrow$ nepárne $\qquad 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ párne

9 nespĺňa naše podmienky, ale funguje tu prechod cez desiatku tak, ako sme si vyššie spomenuli.

$19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow$ párne $\qquad 1 \cdot 9 = 9 \rightarrow$ nepárne

$20 \rightarrow 2 + 0 = 2 \rightarrow$ párne $\qquad 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ párne

19 nespĺňa naše podmienky.

$29 \rightarrow 2 + 9 = 11 \rightarrow$ nepárne $\qquad 2 \cdot 9 = 18 \rightarrow$ párne

$30 \rightarrow 3 + 0 = 3 \rightarrow$ nepárne $\qquad 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ párne

Keďže čísla 29 aj 30 spĺňajú naše podmienky a hľadáme čo najmenší počet bodov, tak to znamená, že prvý tím mal 29 bodov.

Ďalej sa pozrime na body druhého tímu:

Ako sme si ukázali pri hľadaní počtu bodov prvého tímu, pri väčšine prechodov cez desiatku sa nám nemení parita ciferného súčtu. Toto vieme použiť aj pri nájdení počtu bodov pre druhý tím.

Povedzme, že hľadané číslo je dvojciferné a na mieste jednotiek má cifru 9. Keby toto číslo malo na mieste desiatok párnu cifru, jeho ciferný súčet by bol nepárny (párne + nepárne = nepárne), čo nevyhovuje podmienke v zadaní. Avšak keby malo na mieste desiatok nepárnu cifru, tak by malo nepárny ciferný súčin (keďže by sme mali číslo zložené z dvoch nepárnych cifier), čo tiež nevyhovuje zadaniu. Preto neexistuje žiadne dvojciferné číslo také, ktoré by spĺňalo podmienky počtu bodov druhého tímu.

Skúsme hľadať trojciferné číslo, ktoré by tieto podmienky spĺňalo. Stále hľadáme číslo, ktoré má na mieste jednotiek cifru 9. Najmenším takým trojciferným číslom je 109, a tak si môžeme overiť, či spĺňa naše podmienky:

109 → 1 + 0 + 9 = 10 → párne 1 · 0 · 9 = 0 → párne

110 → 1 + 1 + 0 = 2 → párne 1 · 1 · 0 = 0 → párne

Keďže obe čísla spĺňajú naše podmienky, tak druhý tím bude mať 109 bodov.

Nakoniec sa pozrime sa na body tretieho tímu:

Nepárny ciferný súčin vieme dostať iba v prípade, že dané číslo je zložené iba z nepárnych cifier. Napríklad číslo 11 má ciferný súčin 1, ale po pripočítaní 1 sa číslo zmení na 12, čo nám zmení ciferný súčin na párny. Podobne sa tak stane aj pri ostatných nepárnych číslach. Po pripočítaní 1 k hocijakému nepárnemu číslu sa z nášho čísla stane číslo párne, čím sa zmení aj parita ciferného súčinu. Tým sme dokázali, že neexistuje počet bodov tretieho tímu spĺňajúci podmienky.

Po prejdení čísel sme zistili, že tímy majú takéto počty bodov:

Prvý tím: 29 bodov.

Druhý tím: 109 bodov.

Tretí tím: počet bodov pre tento tím neexistuje.

KOMENTÁR

Viacero riešení pracovalo s myšlienkou, že keď máme nejaké číslo a pripočítame k nemu 1, zmení sa parita jeho ciferného súčtu, pretože sa zmenila parita samotného čísla. To však nie je pravda, pretože keď máme číslo s cifrou 9 na mieste jednotiek, tak sa môže stať, že po pripočítaní 1 sa parita ciferného súčtu daného čísla nezmení (napríklad číslo 19 má párny ciferný súčet a takisto aj číslo 20).

Taktiež si treba dávať pozor na to, že ak sa v zadaní pýtame na najmenšie možné číslo, nestačí nájsť hocijaké, ktoré spĺňa zadané podmienky, ale treba dokázať, že naozaj žiadne menšie neexistuje.

Riešenie úloh skúšaním tiež nie je vhodný postup riešenia, pretože pri väčších počtoch rôznych možností (napr. viac ako 1000) by trval veľké množstvo času, poprípade pri takomto postupe ľahko môžete zabudnúť na nejaké správne možnosti a vo svojom riešení ich vynechať. Je preto lepšie zamerať sa na hľadanie vlastností daných čísel alebo vecí v úlohe, ktoré nám pomôžu úlohu jednoducho a efektívne/rýchlo vyriešiť a dôjsť k správnemu výsledku.