6. ÚLOHA

Opravovali: **Martinka Osuská** & **Matúš Masrna**

Najkrajšie riešenie: **Barbora Rjašková**

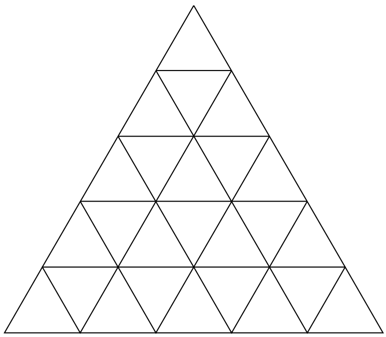
Počet riešení: **57**

ZADANIE

Na papieri má Krycák nakreslený plán domu v tvare trojuholníkovej mriežky s 5 riadkami ako na obrázku. Trojuholníky predstavujú miestnosti. V najvrchnejšej miestnosti na pláne je vchod do domu. Z jednej miestnosti do druhej sa dá prechádzať iba vtedy, ak spolu susedia stranou. Do každej miestnosti sa dá vojsť iba raz.

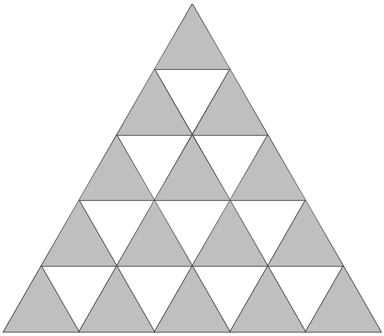
a) Koľko najviac miestností vie Krycák navštíviť v tomto pláne domu?

b) Koľko najviac miestností by vedel navštíviť, ak by plán domu bola mriežka s 2025 riadkami?

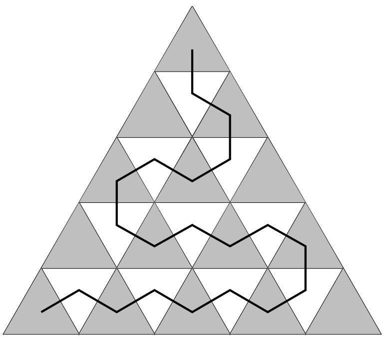


VZOROVÉ RIEŠENIE

Keď sa pozrieme na trojuholníkovú mriežku, zistíme, že sa skladá z množstva malých trojuholníkov, ktoré majú hroty otočené rôznym smerom. Niektoré majú hrot hore, iné hrot dole. Môžeme si ich teda podľa toho ofarbiť tak, že tie, čo majú hrot hore, ofarbíme na sivo, a tie, čo majú hrot dole, necháme biele. Keď sa postavíme na sivé políčko, vidíme, že stranou susedí len s bielymi. To znamená, že ako prechádza Krycák miestnosťami, na striedačku prechádza sivými a bielymi.



a) Spočítame, koľko máme trojuholníkov každej farby. Máme 15 sivých a 10 bielych. Vieme, že Krycák každým svojím krokom musí zmeniť farbu políčka. Teda ak minie biele políčka, ktorých je menej, už ďalej nebude vedieť pokračovať. Z toho vieme povedať, že Krycák vie teoreticky prejsť najviac $2 \cdot 10 + 1 = 21$ miestností, keby prešiel 10 dvojíc bielych a sivých trojuholníkov plus začiatočný sivý trojuholník. Teraz ale musíme dokázať, že to naozaj ide. Dá sa to napríklad touto cestou:



b) Teraz poďme zistiť počty trojuholníkov, keď má plán domu 2025 riadkov. Môžeme si všimnúť, že počet sivých trojuholníkov postupne rastie - v prvom riadku je 1, v druhom 2, v treťom 3 a tak ďalej, až v poslednom ich je 2025. Ich počet vieme vypočítať tak, že spočítame prvý a posledný riadok, druhý a predposledný, až po 1012. a 1014. Zakaždým nám vyjde ten istý súčet, keďže $1 + 2025 = 2 + 2024 = \cdots = 1012 + 1014 = 2026$. To je teda $1012 \cdot 2026$ políčok. K tomu ale musíme ešte pripočítať 1013. riadok, pretože ten nemal svoju dvojicu. Všetkých sivých políčok je preto $1012 \cdot 2026 + 1013 = 2\,051\,325$.

To isté platí aj o bielych trojuholníkoch, akurát v prvom riadku nie sú žiadne, v druhom je 1 atď. až v poslednom ich je 2024. Ich počet vieme vypočítať rovnakým spôsobom ako pri sivých, akurát súčet všetkých 1012 dvojíc riadkov teraz bude 2024 namiesto 2026 a v strednom riadku bez dvojičky ich bude 1012. Preto ich všetkých bude $1012 \cdot 2024 + 1012 = 2\,049\,300$ (na tento súčet sme mimochodom mohli prísť aj tak, že by sme od počtu sivých políčok odčítali 2025, keďže biele sú oproti sivým iba posunuté o riadok nižšie, čiže im iba chýba 2025. riadok).

Z toho si tak, ako v časti a), vypočítame maximálny teoretický počet miestností, cez ktoré Krycák môže prejsť. To je $2 \cdot 2049300 + 1 = 4098601$.

Stále však treba dokázať, že je naozaj možné prejsť cestu, ktorá vedie cez toľko miestností. Na to popíšeme presný postup, ktorým Krycák bude postupovať (a ktorý sme použili aj pri ukázaní cesty v časti a)).

V každom riadku pôjdeme po okraj, dokým sa bude dať. Potom zídeme o políčko nižšie, čím sa dostaneme do nového riadku. V novom riadku máme teraz jedným smerom jedno susedné políčko, ktoré nikdy nenavštívime, pretože sa vyberieme tým druhým smerom k opačnému okraju, čím po ceste prejdeme cez všetky zvyšné políčka riadku. Takto sa nám podarí v každom riadku navštíviť všetky miestnosti okrem jednej. To, samozrejme, neplatí o úplne prvom riadku. Týmto spôsobom preto vynecháme iba 2024 políčok.

Môžeme si urobiť skúšku správnosti. Všetkých políčok je $2051325 + 2049300 = 4100625$. Keď z nich vynecháme 2024, tak prejdeme cez $4100625 - 2024 = 4098601$ políčok, čo je presne to, čo sme povedali, že je maximum kvôli striedaniu farieb.

KOMENTÁR

Táto úloha vás môže naučiť dve zásadné veci.

Prvá z nich sa týka úloh, v ktorých sa pýtame otázky typu „koľko najviac“ alebo „koľko najmenej“. Správne riešenie takejto úlohy má dve dôležité časti.

Prvou je dokázanie, že určite neexistuje spôsob, akým by sme vedeli dosiahnuť vyššie číslo. V tejto úlohe nestačilo, že ste to skúšali na menších či väčších mriežkach a všimli ste si, že s každým riadkom pribudlo jedno vynechané políčko. Nestačilo ani povedať, že keď pôjdeme hadovito, v každom riadku vynecháme krajné políčko. To sú zatiaľ iba odhady na základe vyskúšania niekoľkých možností. Keďže sa ale nedá vyskúšať každá možná cesta, potrebujeme všeobecnejšie vysvetlenie. Čo je dôvod, že medzi nevyskúšanými cestami sa určite nenachádza nejaká ešte dlhšia? Prečo každý pridaný riadok zároveň zvýši počet nenavštívených miestností práve o jednu (a to bez ohľadu na dĺžku riadku či na zvolenú stratégiu prechádzania)?

Druhá časť je dokázanie toho, že nájdené teoretické maximum sa aj skutočne dá dosiahnuť. V tejto úlohe to znamenalo napríklad nakresliť konkrétnu cestu, ktorá toľkými miestnosťami prejde, alebo popísať spôsob, ako takú cestu vytvoriť.

A na záver druhá vec, ktorú si môžete zo vzorového riešenia odniesť, je princíp ofarbovania. Pri úlohách, kde treba niečo dokázať v mriežke, je to veľmi častý základ postupu. Dokonca konkrétnejšie také ofarbenie, že pri každom pohybe musíme zmeniť farbu, je veľmi silná zbraň!