5. ÚLOHA

Opravovali: **Gertrúda „Mimi“ Hanusová** & **Richard Vodička**

Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

Počet riešení: **18**

ZADANIE

Aténske záhrady majú tvar rôznostranného trojuholníka ATE, v ktorom N je stred kružnice vpísanej a Y stred kružnice opísanej. Dokážte, že uhol ANY je menší alebo rovný $90°$ práve vtedy, keď $2|TE| \leq |AT| + |AE|$.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Dokreslime si do obrázku druhý priesečník priamky AN, osi uhla TAE, s kružnicou opísanou a označme ho S. Označme si aj D priesečník AN s TE.

Bod S, ktorý je priesečníkom osi uhla TAE a kružnice opísanej trojuholníku ATE, je známy ako Švrčkov bod a leží aj na osi strany TE. Na tejto osi leží aj bod Y, pretože je to stred opísanej kružnice. Trojuholník AYS je rovnoramenný, lebo AY a YS sú polomermi tej istej kružnice, a teda sú rovnako dlhé. Preto leží päta výšky v tomto trojuholníku na stranu AS v jej strede. Bod N je v tomto trojuholníku iba nejakým bodom na strane AS, čiže $|\sphericalangle ANY| \leq 90°$ práve vtedy, keď N je bližšie k bodu S ako k bodu A, resp. keď $|AN| \geq |NS|$.

O osi vnútorného uhla v trojuholníku platí, že delí protiľahlú stranu v tom istom pomere, v akom sú dĺžky zvyšných dvoch strán trojuholníka. V našej úlohe teda $\frac{|AT|}{|AE|} = \frac{|TD|}{|ED|}$. Prirátame teraz k tejto rovnosti 1 na obe strany:

$$\frac{|AT| + |AE|}{|AE|} = \frac{|TD| + |ED|}{|ED|} = \frac{|TE|}{|ED|}$$

$$|AT| + |AE| = |TE| \cdot \frac{|AE|}{|ED|}$$

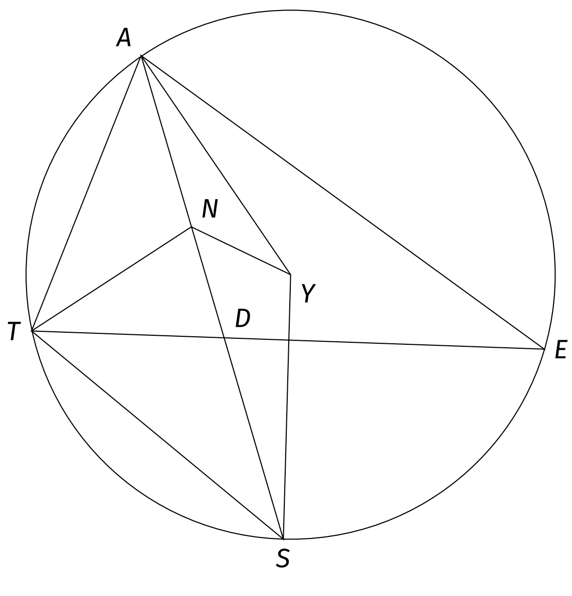
Druhá nerovnosť zo zadania je teda ekvivalentná s nerovnosťou $2|TE| \leq |TE| \cdot \frac{|AE|}{|ED|}$, čo, keďže $|TE| \neq 0$, môžeme touto dĺžkou vydeliť a dostávame $2 \leq \frac{|AE|}{|ED|}$.

Uvedomme si, že trojuholníky ATS a ADE sú podobné, lebo uhly TAS a DAE sú rovnako veľké a uhly TSA a DEA sú obvodové nad tou istou tetivou. Dostávame tak, že $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AS|}{|ST|}$. Druhá nerovnosť zo zadania je tak ekvivalentná s nerovnosťou $2 \leq \frac{|AS|}{|ST|}$.

Dokážme teraz, že $|ST| = |SN|$.

Označme si $|\sphericalangle TAN| = \alpha$ a $|\sphericalangle ATN| = \beta$. Vieme, že TN je os uhla ATE, čiže aj uhol NTE má veľkosť β a takisto uhol NAE má veľkosť α. Z obvodových uhlov nad tetivou SE aj $|\sphericalangle STE| = \alpha$, a teda $|\sphericalangle STN| = |\sphericalangle NTE| + |\sphericalangle STE| = \alpha + \beta$. Vieme aj, že $|\sphericalangle TNS| = 180° - |\sphericalangle TNA| = 180° - (180° - |\sphericalangle TAN| - |\sphericalangle ATN|) = \alpha + \beta$. Získali sme rovnosť uhlov STN a TNS, čiže trojuholník STN je rovnoramenný a naozaj $|ST| = |SN|$.

Dosadením tejto rovnosti do našej nerovnosti dostávame $2 \leq \frac{|AS|}{|SN|}$, z čoho $|SN| \leq \frac{|AS|}{2}$. Keďže SN je časť úsečky AS, tak táto nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou $|SN| \leq |AN|$, ktorá je ekvivalentná s tvrdením $|\sphericalangle ANY| \leq 90°$, čím je úloha dokázaná.



INÉ RIEŠENIE

Ukážeme si, ako sa dá úloha dokončiť využitím Ptolemaiovej vety. Ptolemaiova veta nám hovorí, že v tetivovom štvoruholníku je súčin dĺžok uhlopriečok rovný súčtu súčinov dĺžok protiľahlých strán štvoruholníka. V našom prípade to znamená, že

$$|AS||TE| = |ST||AE| + |SE||AT|$$

Z tvrdenia, ktoré sme si dokázali v prvom riešení, vieme, že $|ST| = |SE| = |SN|$, teda $|AS||TE| = |SN|(|AE| + |AT|)$. Z toho vieme znovu nerovnosť v zadaní ekvivalentne upraviť na $2 \leq \frac{|AS|}{|ST|}$, odkiaľ už úlohu dokončíme rovnako ako v prvom riešení.