6. ÚLOHA

Opravovali: **Erik Novák** & **Katka Farbulová**

Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

Počet riešení: **9**

ZADANIE

Triolivus si najprv zvolil celé číslo n väčšie alebo rovné 3 a následne nakreslil v rovine n priamok tak, že žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode. Za každý rovnostranný trojuholník, ktorý vznikne prienikom troch týchto priamok, zje tri olivy. Za každý rovnoramenný, ale nie rovnostranný trojuholník, ktorý vznikne z troch priamok, zje jednu olivu. Aký najväčší počet olív vedel Triolivus zjesť v závislosti od n?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Pre zjednodušenie riešenia si predstavme, že Triolivus zje olivu za každú základňu rovnoramenného trojuholníka v jeho rovine. Týmto spôsobom zje jednu olivu za každý rovnoramenný, ale nie rovnostranný trojuholník, a tri olivy za každý rovnostranný, keďže rovnostranný trojuholník môžeme chápať ako rovnoramenný, v ktorom by každá strana mohla byť základňou.

Vezmime si ľubovoľnú priamku p a zistime, koľko základní rovnoramenných trojuholníkov tvorených zvyšnými n – 1 priamkami na nej môže byť. Zvoľme priamku q rôznu od p, ktorá s priamkou p zviera uhol x (meraný v kladnom smere od priamky p). Ak by q tvorila rovnoramenné trojuholníky so základňou na p aj s priamkou r_1, aj s priamkou r_2, tak priamky r_1 a r_2 by museli obe zvierať uhol $\pi - x$ s priamkou p, teda by boli rovnobežné, čo je v spore so zadaním. Každá zo zvyšných n – 1 priamok môže teda tvoriť rovnoramenný trojuholník so základňou na p s nanajvýš jednou ďalšou priamkou.

V zvyšných n – 1 priamkách sa nachádza $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ dvojíc priamok, ktoré môžu tvoriť rovnoramenný trojuholník so základňou na p, teda to je aj najväčší

počet olív, ktorý vie Triolivus získať pomocou rovnoramenných trojuholníkov so základňou na p. Toto platí pre každú z n priamok, teda celkový maximálny počet získateľných olív je $n \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Ukážme už len, že vždy existuje konštrukcia, ktorá získa tento počet olív. Všimnime si, že pre nepárne n získa tento počet olív pravidelný n-uholník, keďže pre každú z n jeho strán a_i, $1 \leq i \leq n$ sa v ňom nachádza $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$ dvojíc strán tvoriacich po predĺžení na priamku rovnoramenný trojuholník. Jedná sa o dvojice strán osovo súmerných podľa osi strany a_i, resp. o dvojice strán (a_{i-j}, a_{i+j}), $1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$. Pre lepšiu predstavu si odporúčame vyskúšať situáciu nakresliť pre nejaké malé n.

Pre párne n analogicky získa tento počet olív pravidelný $(n+1)$-uholník bez jednej strany.