4. ÚLOHA

Opravovali: **Kopy** & **Libi**

Najkrajšie riešenia: **Alenka Chladná** & **Gregor Černický**

Počet riešení: **27**

ZADANIE

Series má dané kladné celé číslo k a uvažuje postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_0^\infty$ takú, že $a_0 = 0$ a $a_n = ka_{n-1} + \sqrt{(k^2-1)a_{n-1}^2 + 1}$ pre všetky kladné celé čísla n. Dokážte, že každý člen postupnosti je nezáporné celé číslo a a_{2n} je deliteľné číslom $2k$ pre všetky kladné celé čísla n.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Vypočítajme si najprv prvých pár členov postupnosti:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 &= ka_0 + \sqrt{(k^2-1)a_0^2 + 1} = 0 \cdot k + \sqrt{0 \cdot (k^2-1) + 1} = \sqrt{1} = 1\\
a_2 &= ka_1 + \sqrt{(k^2-1)a_1^2 + 1} = k + \sqrt{k^2 - 1 + 1} = 2k
\end{aligned}
$$

Číslo k je kladné celé číslo. Vidíme, že a_1 a a_2 sú kladné čísla. Poďme matematickou indukciou dokázať, že každý člen postupnosti bude kladný a že táto postupnosť bude rastúca, čo sa nám zíde neskôr. Pre členy a_1 a a_2 to platí. Poďme teda dokázať, že ak je číslo a_i kladné, tak číslo a_{i+1} je dobre definované (teda číslo pod odmocninou nebude záporné) a väčšie ako a_i. Vieme, že číslo k je kladné celé číslo a a_i je kladné. Preto platí:

$$
\begin{aligned}
a_{i+1} &= ka_i + \sqrt{(k^2-1)a_i^2 + 1}\\
&\geq a_i + \sqrt{(k^2-1)a_i^2 + 1}\\
&\geq a_i + \sqrt{(1-1)a_i^2 + 1}\\
&\geq a_i + 1
\end{aligned}
$$

Indukciou sme teda dostali, že táto postupnosť je kladná a rastúca, a preto sa nám nestane, že pod odmocninou bude niekedy záporné číslo.

Upravme rekurentný výraz tak, aby sa v ňom nevyskytovali odmocniny:

$$\begin{aligned} a_n &= ka_{n-1} + \sqrt{(k^2-1)a_{n-1}^2 + 1} \\ a_n - ka_{n-1} &= \sqrt{(k^2-1)a_{n-1}^2 + 1} \end{aligned}$$

Obe strany sú kladné, takže umocnenie na druhú je v tomto prípade ekvivalentná úprava:

$$\begin{aligned} (a_n - ka_{n-1})^2 &= (k^2-1)a_{n-1}^2 + 1 \\ a_n^2 - 2ka_na_{n-1} + k^2a_{n-1} &= k^2a_{n-1}^2 - a_{n-1}^2 + 1 \\ a_n^2 - 2ka_na_{n-1} &= -a_{n-1}^2 + 1 \\ a_n^2 &= 2ka_na_{n-1} - a_{n-1}^2 + 1 \end{aligned}$$

Upravená rovnosť platí pre všetky čísla n väčšie alebo rovné ako 1. Ak bude $n \geq 2$, tak túto rovnosť vieme použiť aj pre člen a_{n-1}^2 a vyjadriť tak a_n v závislosti na dvoch predchádzajúcich členoch:

$$\begin{aligned} a_n^2 &= 2ka_na_{n-1} - a_{n-1}^2 + 1 \\ a_n^2 &= 2ka_na_{n-1} - (2ka_{n-1}a_{n-2} - a_{n-2}^2 + 1) + 1 \\ a_n^2 &= 2ka_na_{n-1} - 2ka_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2 - 1 + 1 \\ a_n^2 &= 2ka_na_{n-1} - 2ka_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2 \\ a_n^2 - a_{n-2}^2 &= 2ka_{n-1}(a_n - a_{n-2}) \\ (a_n - a_{n-2})(a_n + a_{n-2}) &= 2ka_{n-1}(a_n - a_{n-2}) \end{aligned}$$

Na začiatku sme poznamenali, že postupnosť je rastúca, takže výraz $a_n - a_{n-2}$ je nenulový. Preto ním vieme vykrátiť obe strany a dostaneme rekurentný vzorec:

$$\begin{aligned} (a_n - a_{n-2})(a_n + a_{n-2}) &= 2ka_{n-1}(a_n - a_{n-2}) \\ a_n + a_{n-2} &= 2ka_{n-1} \\ a_n &= 2ka_{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

Z tohoto vzorčeka vieme matematickou indukciou ukázať, že všetky členy postupnosti budú celé čísla. Ak totiž a_{n-1} aj a_{n-2} sú celé čísla, tak aj výraz $2ka_{n-1} - a_{n-2}$ bude celé číslo.

Navyše všetky členy sú kladné, ako sme ukázali na začiatku. To nám dokončuje dôkaz, že členy tejto postupnosti sú kladné celé čísla.

Zároveň, ak je člen a_{n-2} deliteľný číslom $2k$, tak celá pravá strana $2ka_{n-1} - a_{n-2}$ bude deliteľná číslom $2k$, a teda aj a_n bude deliteľné číslom $2k$. Keďže a_2 je deliteľné číslom $2k$, tak vďaka tomu bude aj a_4 deliteľné číslom $2k$ a aj každý ďalší člen postupnosti v tvare a_{2n}, kde n je kladné celé číslo.