

### 3. ÚLOHA

Opravovali: **Braňo Ječim & Števo Vašak**

Najkrajšie riešenia: **Ján Meteňko & Veronika Jakabová**

Počet riešení: **37**

#### ZADANIE

Herkules sa snaží zabiť hydry. Hydra má niekoľko hláv a každá z hláv má na sebe kladné celé číslo. Herkules môže vždy odseknúť práve jednu hlavu, a podľa toho, aké číslo má táto hlava na sebe, sa udeje jedna z udalostí:

- ak má hlava číslo  $2n$ , po jej odseknutí hydre narastú 2 hlavy, každá s číslom  $n$ ,
- ak má hlava nepárne prvočíslo, po jej odseknutí sa nestane nič,
- inak po odseknutí hlavy narastie hlava s číslom o 1 väčším, ako bolo najväčšie číslo na niektorej z hláv pred týmto odseknutím.

Dokážte, že pre každú hydry s konečným počtom hláv existuje konečná postupnosť seknutí, pomocou ktorých Herkules odsekne všetky hlavy a tento postup popíšte.

#### VZOROVÉ RIEŠENIE

Skúsme sa zamyslieť nad tým, ako vieme nejakou postupnosťou udalostí zmenšiť svoj problém.

Zaujímavá pre nás bude niektorá z hláv s aktuálne najväčším číslom  $n$ . Všimnime si, čo sa stane v jednotlivých prípadoch, ak túto hlavu odsek-neme:

- $n$  bolo párne, čiže narastú dve hlavy s menším číslom ako bolo  $n$ .
- $n$  bolo nepárne prvočíslo, nová hlava už nenarastie.
- Inak narastie nová hlava s číslom  $n + 1$ . Toto číslo bude určite párne. Ak je  $n > 1$ , tak platí, že ak odsek-neme novovzniknutú hlavu, dostaneme dve hlavy s číslami menšími ako  $n$ .

Všimnime si, že takto môžeme každú z hláv s aktuálne najväčším číslom zmeniť na dve hlavy s menším číslom alebo odstrániť, až pokým nebude najväčšie číslo na hlavách 1. Ak sa nám podarilo všetky hlavy po ceste eliminovať pomocou nepárnych prvočísel, tu sa pre nás úloha končí.

Presvedčme sa teraz o tom, že sa vieme zbaviť všetkých hláv s číslom 1 bez ohľadu na to, koľko ich na konci ostalo.

1. Najprv potrebujeme mať aspoň päť hláv s číslom 1. Ak ich už máme, pokračujeme bodom 2. Ak nie, vezmeme nejakú hlavu s číslom 1 a odsekne ju. Dostaneme jednu hlavu s číslom 2. Keď odsekne tú, ostanú nám dve hlavy s číslom 1. Tento proces môžeme opakovať, až pokým nebudeme mať takýchto hláv dostatok.
2. Vezmime si päť hláv s číslom 1. Každú z týchto piatich hláv postupne odsekne. Ostanú nám hlavy s číslami 2, 3, 4, 5 a 6, pretože sa bude najvyššie číslo spomedzi všetkých hláv postupne zvyšovať.
3. Hlavy s číslami 3 a 5 odsekne a nové nenarastú.
4. Hlavy s číslami 2 a 4 rozsekne štyrmi seknutiami na šesť hláv s číslom 1.
5. Teraz máme jednu hlavu s číslom 6 a niekoľko hláv s číslom 1. Vždy, keď odsekne hlavu s číslom 1, narastie hlava s číslom 7, ktorú môžeme ihneď odseknúť a nová už nenarastie. Takto postupne eliminujeme všetky hlavy s číslami 1.
6. Ostala nám iba jedna hlava s číslom 6, ktorú rozsekne na dve hlavy s číslom 3, ktorých sa ďalšími dvomi seknutiami vieme zbaviť.

Ukázali sme, že nech sú hlavy na začiatku dané ľubovoľne, vždy sa vieme dostať do situácie, kedy máme iba niekoľko hláv s číslom 1. Tiež sme si ukázali, že hláv iba s číslami 1 sa vieme zbaviť.