2. ÚLOHA

Opravovali: **Martin Šmilňák** & **Bianka Gurská**

Najkrajšie riešenie: **Lívia Sušková**

Počet riešení: **47**

ZADANIE

Maxisigmos má dve rôzne nezáporné reálne čísla x a y, ktoré spĺňajú $x + \sqrt{y} = \sqrt{x} + y$. Nájdite maximálnu hodnotu súčtu Maxisigmových čísel.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Upravujme rovnicu zo zadania:

$$x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$
$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Keďže platí $x \neq y$, tak platí aj $\sqrt{x} \neq \sqrt{y}$, a teda môžeme výrazom $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ deliť, dostaneme:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

Zadanie sa pýta na súčet $x + y$. Aby sme ho vedeli vyjadriť, umocnime obe strany rovnice na druhú:

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = 1$$
$$x + y = 1 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

Hodnota $x + y$ teda bude maximálna práve vtedy, keď hodnota $2\sqrt{x}\sqrt{y}$ bude minimálna. Keďže je ale hodnota odmocnín vždy nezáporná, tak aj celý výraz $2\sqrt{x}\sqrt{y}$ je vždy nezáporný, teda najmenej 0. Súčet $x + y$ teda vie byť najviac $1 - 0 = 1$. To nastáva napríklad vtedy, keď $x = 0$ a $y = 1$ (alebo naopak $x = 1$ a $y = 0$), čo spĺňa podmienku $0 + \sqrt{1} = \sqrt{0} + 1$.