

2. ÚLOHA

Opravovali: **Jano Richnavský & Timka Szöllösová**

Najkrajšie riešenie: **Michal Ferdinandy**

Počet riešení: **34**

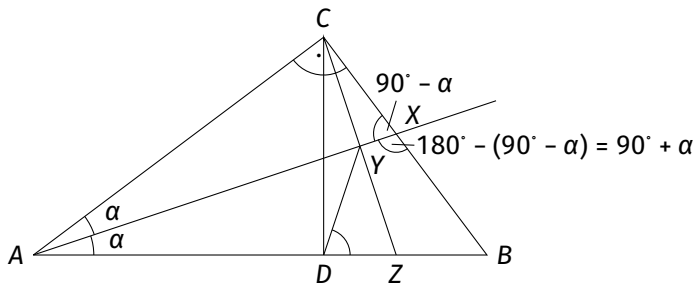
ZADANIE

Chordilikus si nakreslil trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C . Body D a Z ležia na strane AB tak, že CD je kolmé na AB a $|AC| = |AZ|$. Polpriamka, ktorá rozdeľuje uhol BAC na polovicu, pretína stranu CB v bode X a úsečku CZ v bode Y . Dokážte, že štvoruholník $BXYD$ je tetivový. Tetivový štvoruholník je taký štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica, čo je práve vtedy, keď súčet protíahlých uhlov je 180° .

VZOROVÉ RIEŠENIE

Všimnime si, že bod Y je v strede úsečky ZC , pretože trojuholník AZC je rovno-ramenný s touto základňou a AY je teda nielen os uhla, ale aj jeho ťažnica a výška.

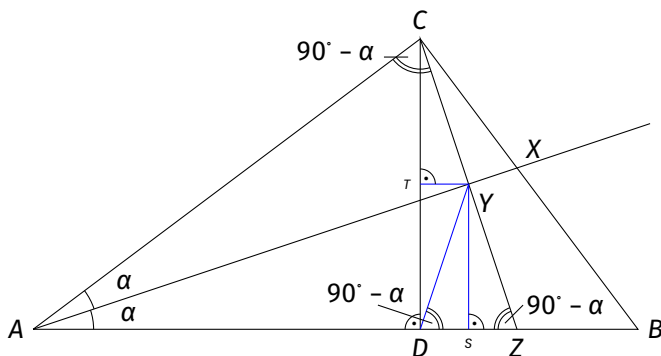
Označme si uhol $|\sphericalangle CAY| = \alpha$. V pravouhlom trojuholníku CAX je potom tretí uhol $|\sphericalangle CXA| = 90^\circ - \alpha$. Susedný uhol k nemu $\sphericalangle AXB$ bude mať veľkosť $180^\circ - |\sphericalangle CXA| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$. Všimnime si, že nám stačí dokázať, že $|\sphericalangle YDZ| = |\sphericalangle CXA| = 90^\circ - \alpha$, pretože vtedy bude mať $\sphericalangle YDZ$ spolu s protíahlým uhlom $\sphericalangle YXB$ súčet 180° , z čoho priamo plynie to, že náš štvoruholník je naozaj tetivový (zvyšná dvojica bude mať tiež zjavne 180°).



Toto si vieme ukázať hneď viacerými spôsobmi, ukážme si dva s rôznymi prístupmi.

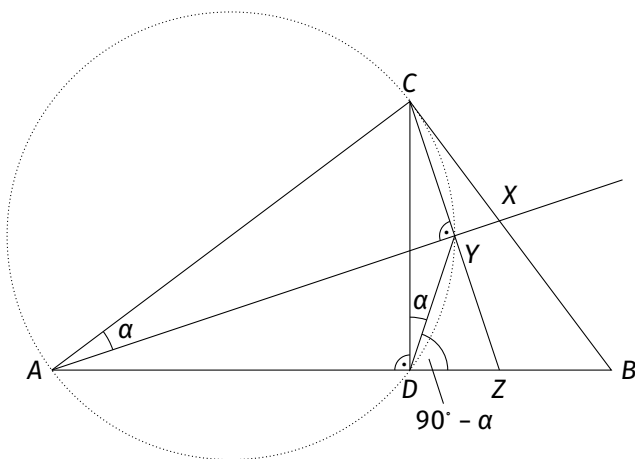
Podobnosť trojuholníkov

Z rovnoramennosti trojuholníka AZC vyplýva $|\angle ACY| = |\angle AZY| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. V pravouhlom trojuholníku DZC vieme spustiť kolmicu z bodu Y na zvyšné strany, do bodov T a S , ktoré sa stanú strednými priečkami tohto trojuholníka. Takto nám vznikol obdĺžnik $DSYT$. Nehľadiac na to, ktorou uhlopriečkou ho rozdelíme, dostaneme dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ktoré sú zároveň zhodné aj s našimi strednopriečkovými (napr. podľa vety sus – pravý uhol a dvojica strán okolo). Z toho dostávame, že $|\angle YDS| = |\angle YZS| = |\angle AZY| = 90^\circ - \alpha$, čo sme potrebovali.



Tetivový štvoruholník ADYC

Pozrime sa najprv na rovnoramenný trojuholník AZC . D je päta výšky DC , preto $|\angle ADC| = 90^\circ$. Keďže je AY osou uhla v rovnoramennom trojuholníku, je zároveň aj výškou, preto aj $|\angle AYC| = 90^\circ$, z čoho plynie $|\angle ADC| = |\angle AYC|$. Ak máme nad jednou úsečkou (tetivou) dva rovnaké uhly, tak vieme, že oba ležia na tej istej kružnici, z čoho vyplýva, že body A, D, Y, C ležia na kružnici, a teda sú vrcholmi tetivového štvoruholníka. Potom, rovnako podľa vety o obvodovom uhle, vieme, že aj $|\angle CAY| = |\angle CDY| = \alpha$. Z pravého uhla pri vrchole D potom jednoducho dopočítame $|\angle CDZ| - |\angle CDY| = |\angle YDZ| = 90^\circ - \alpha$, čo bolo treba dokázať.



KOMENTÁR

Väčšine z váš sa podarilo úlohu vyriešiť a aj spísať na plný počet bodov, čo nás samozrejme teší, no našli sme aj niekoľko opakujúcich sa chýb či zbytočnej práce navyše, ktorej by sme vás radi do budúcnosti zbavili.

V prípade, že popisujete dva podobné útvary, je nutné vymenovať ich body v poradí ich podobnosti. Je rozdiel, či napíšete $\triangle ADY \sim \triangle AXB$, alebo $\triangle ADY \sim \triangle ABX$, pretože jedna pravda je, ale to druhé nie. Rovnako pri zhodnosti je nutné si dať pozor, ktoré z viet o zhodnosti používate a aj ju správne zapísať.

Viacerí z vás nám tiež popísali, prečo sa obe dvojice uhlov v štvoruholníku $BXYD$ sčítajú na 180° , čo je však zjavné, už keď dokážete jednu z tých dvojíc, keďže súčet vnútorných uhlov ľubovoľného štvoruholníka je práve $360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$.