

## 4. ÚLOHA

Opravovali: **Erik Novák & Matúš Masrna**

Najkrajšie riešenie: **Tomáš Sukeľ**

Počet riešení: **15**

### ZADANIE

Okolo okrúhleho stola je rovnomerne rozmiestnených  $2n$  Grékov, pričom  $n$  z nich sú filozofi a  $n$  sú vojaci. Filolistus si zapísal vzdialenosti medzi každou dvojicou filozofov do zoznamu, od najkratšej po najdlhšiu. Vojalistus si zapísal vzdialenosti medzi každou dvojicou vojakov do iného zoznamu, tiež od najkratšej po najdlhšiu. Rovnaká vzdialenosť sa môže v zozname vyskytovať viackrát. Dokážte, že Filolistov a Vojalistov zoznam sú rovnaké.

### VZOROVÉ RIEŠENIE

Slovom *vzdialenosť* budeme chápať menší z rozdielov pozícií dvoch Grékov (reálna geometrická vzdialenosť dvoch Grékov je totiž závislá iba od rozdielu ich pozícií). Napríklad, pre Gréka na pozícii 1 a Gréka na pozícii  $n$  je vzdialenosť jednoducho  $n - 1$ .

Ďalej si uvedomme, že najdlhšia možná vzdialenosť medzi dvoma Grékmi je  $n$ . Dvaja Gréci sú v tejto vzdialenosti práve vtedy, keď sú na pozíciách oproti sebe.

Ak pre každú zo vzdialeností  $1, 2, \dots, n$  ukážeme, že je rovnako veľa dvojíc filozofov, ako dvojíc vojakov, čo majú práve túto vzdialenosť, úloha bude vyriešená.

Vezmime si vzdialenosť  $x < n$ . Pre každého Gréka existujú dvaja, ktorí sú od neho vzdialení  $x$ . Nazvime týchto Grékov jeho susedmi a volajme ich prirodzene pravý a ľavý.

Pozrime sa iba na pravého suseda každého filozofa. Nech  $F_{FP}$  označuje počet filozofov, ktorých pravý sused je tiež filozof a  $F_{VP}$  označuje počet filozofov, ktorých pravý sused je vojak. Týmto spôsobom sme započítali každú

dvojicu, ktorá obsahuje aspoň jedného filozofa práve raz (a  $F_{FP}$  je teda zároveň počet všetkých dvojíc filozofov, ktorí sú od seba vo vzdialenosti  $x$ ). Keďže sme každého filozofa započítali raz a filozofov je  $n$ , dostávame rovnosť  $F_{FP} + F_{VP} = n$ .

Teraz sa pozrime iba na ľavého suseda každého vojaka. Nech  $V_{VL}$  označuje počet vojakov, ktorých ľavý sused je tiež vojak a  $V_{FL}$  označuje počet vojakov, ktorých ľavý sused je filozof. Analogicky k predošlému kroku sme započítali každú dvojicu s aspoň jedným vojakom práve raz a dostávame  $V_{VL} + V_{FL} = n$ .

Dostali sme dva súčty, ktoré sú oba rovné  $n$ , môžeme ich teda dať do spoločnej rovnosti  $F_{FP} + F_{VP} = V_{VL} + V_{FL}$ . Uvedomme si teraz, že pravý sused každého filozofa, ktorý je vojak je práve takým vojakom, ktorého ľavý sused je filozof a naopak. Platí teda  $F_{VP} = V_{FL}$ . Túto rovnosť môžeme odpočítať od spoločnej rovnosti, čím dostaneme hľadané  $F_{FP} = V_{VL}$ .

Pre vzdialenosť  $x = n$  je pravým a ľavým susedom Gréka ten istý Grék, čo naše výpočty ovplyvňuje iba tak, že každú dvojicu  $F_{FP}$  a  $V_{VL}$  započítame dvakrát, čiže na konci dostaneme rovnosť  $2 \cdot F_{FP} = 2 \cdot V_{VL}$ .

Ukázali sme, že pre každú vzdialenosť  $x \leq n$  je počet dvojíc filozofov a počet dvojíc vojakov v tejto vzdialenosti rovnaký, teda aj Filolistov a Vojalistov zoznam sú rovnaké.

## KOMENTÁR

V prvom rade by sme sa radi vyjadrili k malému počtu riešení, ktoré mala táto úloha. Obávame sa, že pre mnohých z vás mohla vyzeráť odstrašujúco. Chceli by sme vás motivovať, aby ste sa s každou úlohou aspoň kúsok popasovali a aj v prípade, že nedôjdete k záveru, odovzdávali aspoň čiastočné riešenia. Úloha mala viacero samostatných myšlienok, za ktoré ste mohli jednoducho dostať aspoň časť bodov.

V druhom rade chceme oceniť to, koľko rôznych spôsobov riešenia tejto úlohy ste našli. Sami sme ostali prekvapení vašou kreativitou a dôvtipom.