

6. ÚLOHA

Opravovali: **Matúš Libák & Michal Il'kovič**

Najkrajšie riešenia: **Richard Semanišin & Oliver Seman**

Počet riešení: **15**

ZADANIE

Series má postupnosť takú, že $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ pre všetky kladné celé n , kde x_1 a x_2 sú koreňmi rovnice $x^2 - x - 1 = 0$. Nájdite všetky kladné celé čísla k a l , $k < l$, pre ktoré platí, že l delí $a_n - 2n \cdot k^n$ pre všetky kladné celé čísla n .

VZOROVÉ RIEŠENIE

Korene našej kvadratickej rovnice sú $x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Ak $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$a_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$a_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^n}{\sqrt{5}}$$

Ak $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$a_n = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}^n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}^n}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$a_n = \frac{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}^n + \frac{1-\sqrt{5}}{2}^n}{-\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^n}{\sqrt{5}}$$

Takže vidíme, že a_n bude v oboch prípadoch rovnaké.

Skutočnosť zo zadania, že l delí $a_n - 2n \cdot k^n$, si zapíšeme ako:

$$a_n - 2n \cdot k^n \equiv 0 \pmod{l}$$

$$a_n \equiv 2n \cdot k^n \pmod{l}$$

Dosadením hodnôt 1, 2, 3 za n dostaneme:

$$a_1 = 1 \equiv 2 \cdot k \pmod{l}$$

$$a_2 = 1 \equiv 4 \cdot k^2 \pmod{l}$$

$$a_3 = 2 \equiv 6 \cdot k^3 \pmod{l}$$

$$2 \equiv (2 \cdot k) \cdot 3 \cdot k^2 \pmod{l}$$

Využijeme kongruenciu z a_1 , teda že $1 \equiv 2 \cdot k \pmod{l}$

$$2 \equiv 3 \cdot k^2 \pmod{l}$$

Odpočítame $1 \equiv 4 \cdot k^2$

$$2 - 1 \equiv 3 \cdot k^2 - 4 \cdot k^2 \pmod{l}$$

$$1 \equiv -k^2 \pmod{l}$$

$$4 \equiv -4 \cdot k^2 \pmod{l}$$

$$4 \equiv -1 \pmod{l}$$

A to môže platiť iba pre $l = 5$, teda je to nutná podmienka.

Z toho vychádza:

$$\begin{aligned}1 &\equiv 2 \cdot k & (\text{mod } 5) \\3 \cdot 1 &\equiv 2 \cdot k \cdot 3 & (\text{mod } 5) \\3 &\equiv k & (\text{mod } 5)\end{aligned}$$

A keďže zo zadania platí $1 \leq k < l$, tak vieme, že $k = 3$, čo je druhá nutná podmienka.

Takže ak existuje dvojica (k, l) , ktorá spĺňa zadanie, musí to byť $(3, 5)$. Treba však ešte overiť, že táto dvojica bude naozaj vyhovovať pre všetky n . To urobíme silnou indukciou. (Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla menšie alebo rovné n . Na základe toho odvodíme platnosť aj pre $n + 1$.)

Báza / základný krok indukcie:

$$n = 1:$$

$$5 \mid 1 - 2 \cdot 3$$

$$5 \mid -5$$

$$n = 2:$$

$$5 \mid 1 - 4 \cdot 9$$

$$5 \mid -35$$

Indukčný predpoklad:

$$(\forall m \leq n) (5 \mid a_m - 2m \cdot 3^m)$$

Indukčný krok:

$$5 \mid a_{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} - 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$5 \mid a_n - 2n \cdot 3^n$$

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - 2n \cdot 3^n$$

Sčítame:

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} - 2n \cdot 3^n - 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1}$$

Vyberieme spoločné časti pred zátvorku:

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} - 3^{n-1} \cdot (2n - 2 + 6n)$$

Sčítame v zátvorkách a do zátvorky pripočítame 5 – 5n čo má zvyšok 0:

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} - 3^{n-1} \cdot (3n + 3)$$

Rozšírime dva zlomky $\frac{2}{2}$ a do zátvorky pripočítame 15n + 15 čo má zvyšok 0:

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}} - 3^{n-1} \cdot (18n + 18)$$

Upravíme dva zlomky na štvorce a pravú stranu uzátvorkujeme:

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} - 3^{n-1} \cdot (3^2 \cdot 2 \cdot (n+1))$$

$$5 \mid \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} - 2 \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}$$

$$5 \mid a_{n+1} - 2 \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}$$

Teda sme dokázali pre všetky prirodzené n , že $(3, 5)$ je riešenie (k, l) a ako sme popísali vyššie je nutne jediné.