1. ÚLOHA

Opravovali: **Samo Šandor** & **Kalista Semancová**

Najkrajšie riešeniea: **Richard Semanišin** & **Alenka Chladná**

Počet riešení: **33**

ZADANIE

Ratiotos má dve kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí $30a + 30b = ab$. Akú najväčšiu možnú hodnotu môže mať súčet Ratiotových čísel?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Pri pohľade na rovnicu v zadaní vidíme, že v nej máme až dve premenné, no obe z nich sú celé čísla. Typickou metódou riešenia podobných úloh je rozklad na súčin – teraz ilustrujeme spôsob, ako sa dal v tomto prípade vymyslieť. Na začiatok bude vhodné si prehodiť všetky premenné na jednu stranu.

$$0 = ab - 30a - 30b$$

Všimnime si, že v rovnici máme tri členy, z ktorých dva sú deliteľné premennou a a dva premennou b. Ak si teda predstavíme tento rozklad ako súčin zátvoriek, tak a musí byť vynásobené dvoma ďalšími premennými, to isté platí aj pre b.

Odtiaľ už môžeme prísť na to, že vhodný kandidát na rozklad je súčin dvoch dvojčlenov (výrazov typu a plus alebo mínus niečo a b plus alebo mínus niečo). Prvý z nich bude obsahovať a a druhý z nich b, aby sme po ich roznásobení dostali člen ab. V prvom z nich musí byť koeficient -30, aby sme po roznásobení s b v druhej zátvorke dostali $-30b$, rovnako v druhom dvojčlene musí byť koeficient -30, aby sme po roznásobení s a v prvej zátvorke dostali $-30a$.

To nám už dokopy dáva súčin $(a - 30)(b - 30) = ab - 30a - 30b + 900$. Po roznásobení vidíme, že v ňom máme navyše konštantný člen $30 \cdot 30 = 900$.

Tento člen teda budeme musieť k obom stranám rovnice pripočítať, aby sme dostali na pravej strane požadovaný súčin dvoch dvojčlenov.

Upravujme preto ekvivalentne podmienku zo zadania

$$0 = ab - 30a - 30b$$

$$900 = ab - 30a - 30b + 900$$

$$900 = (a - 30)(b - 30)$$

Nie je náhodou, že sa nám rovnicu podarilo dostať do tvaru, kde na ľavej strane rovnice máme prirodzené číslo a na pravej strane máme súčin [1]. Navyše ukážeme, že obidve zátvorky na pravej strane sú kladné.

Ak z pôvodnej rovnice vyjadríme a, dostaneme $a = \frac{30b}{b-30}$. Nakoľko zo zadania $a > 0$ a $b > 0$, platí aj $30b > 0$, z čoho už plynie, že $b - 30 > 0$ a $b > 30$. Vzhľadom na zameniteľnosť premenných a, b v rovnici rovnakým spôsobom dostaneme aj $a - 30 > 0$.

Môžeme teda zaviesť substitúciu $a - 30 = x$ a $b - 30 = y$, kde $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Zrejme $a + b = x + y + 60$, takže stačí maximalizovať iba súčet $x + y$ za predpokladu, že $xy = 900$. Stačí nám teda už len vyskúšať všetky delitele čísla 900, nájsť ich súčty a odtiaľ určiť maximálny z nich. Zrejme môžeme vzhľadom na zameniteľnosť pri skúšaní možností predpokladať, že $x \geq y$ (keďže pri sčítavaní ani násobení nezáleží na poradí). Samotné vyskúšanie všetkých možností je v Tabuľke 1 nižšie.

[1] Zovšeobecnenie tejto úvahy rozkladu na súčin pre akúkoľvek podobnú rovnicu možno nájsť tu

$x = a - 30$	$y = b - 30$	a	b	$a + b$
1	900	31	930	961
2	450	32	480	512
3	300	33	330	363
4	225	34	255	289
5	180	35	210	245
6	150	36	180	216
9	100	39	130	169
10	90	40	120	160
12	75	42	105	147
15	60	45	90	135
18	50	48	80	128
20	45	50	75	125
25	36	55	66	121
30	30	60	60	120

Tabuľka 1: Tabuľka všetkých kladných deliteľov čísla 900, kde $a \geq b$ s dopočítaným súčtom $a + b$

Maximálnu hodnotu sme dostali hneď v prvom riadku a to konkrétne $\boxed{961}$.

Môžeme si všimnúť, že asi nebola náhoda, že najväčší súčet sme dostali pre delitele „najďalej od seba“. Ukážeme teda aj všeobecnejšie postupy, ako bolo možné prísť k výsledku bez nutnosti skúmania všetkých možností.

Prečo sa niečím takým vôbec zaoberať? Pokiaľ by sme v zadaní úlohy zamenili hodnoty, zrazu by sme nemuseli dostať na ľavej strane rovnice číslo 900, pri ktorom sme museli vyskúšať iba 15 možností, ale nejaké iné číslo, kde by tých možnosti bolo oveľa viac, čo by sa nám už nemuselo podariť v rozumnom čase. Taktiež sa pri nich môžeme naučiť nové postupy a myšlienky, ktoré nám pomôžu pri riešení iných úloh v budúcnosti.

INÉ RIEŠENIE

Uvedomíme si, že máme konštantný súčin dvoch čísel ($xy = 900$) a chceli by sme maximalizovať ich súčet ($x + y$), hľadáme teda horný odhad pre tento súčet. Po vyskúšaní zopár hodnôt môžeme prísť na odhad $x+y \leq xy+1$. Tento odhad teraz dokážeme. Ekvivalentne upravujme

$$x + y \leq xy + 1$$

$$0 \leq xy - x - y + 1$$

$$0 \leq (x - 1)(y - 1)$$

Nakoľko $x, y \in \mathbb{Z}^+$, potom aj $x, y \geq 1$, teda táto nerovnosť je splnená pre každú dvojicu x, y. Taktiež vidíme, že rovnosť sa nadobúda, pokiaľ aspoň jedna zo zátvoriek je rovná 1. Ak teda BUNV $x = 1$, tak z $xy = 900$ máme $y = 900$, $x + y = 901$ a $a + b = x + y + 60 = 901 + 60 = \boxed{961}$, čo je hľadaná maximálna hodnota.

V tomto riešení sme tak všeobecne dokázali, že maximum súčtu dvoch kladných celých čísel s konštantným súčinom je o jedna väčší ako tento súčin.

INÉ RIEŠENIE

Po odvodení rozkladu

$$900 = (a - 30)(b - 30)$$

a kladnosti oboch zátvoriek odhadneme veľkosť deliteľov čísla 900. Označme $k \in \mathbb{N}$ menší z dvojice deliteľov. Druhý deliteľ čísla 900 sa dá vyjadriť ako $d(k) = \frac{900}{k}$ a platí $d(k) \geq k$. Dokážeme, že maximum súčtu $d(k) + k$ sa nadobúda, ak $k = 1$ a $d(k) = 900$ a má hodnotu $k + d(k) = 1 + 900 = 901$.

Keďže d je lomená funkcia tvaru $y = \frac{p}{x}$ s kladným parametrom $p = 900 > 0$, je klesajúca v kladných číslach (a teda aj jej zúženie na kladných celých číslach je klesajúca funkcia). Odtiaľ vieme, že pre všetky $d(k)$ pre $k \geq 2$ platí $d(k) \leq d(2) = \frac{900}{2} = 450$.

Dokopy teda súčet zhora ohraničíme nasledovne

$$d(k) + k \leq d(k) + d(k) \leq 450 + 450 = 900 < 901$$

Pre akékoľvek $k \geq 2$ tak dostávame menšiu hodnotu ako pre $k = 1$. Teda hľadaným maximom $d(k) + k$ je naozaj 901 a maximom $a + b$ je $d(k) + k + 60 = \boxed{961}$.

KOMENTÁR

Bohužiaľ veľká časť z vás prehlásila fakt, že pri konštantnom súčine dvoch čísel sa maximálny súčet nadobúda pokiaľ je jedno z nich 1. V matematickom riešení by sa takéto tvrdenie, ktoré nám neprišlo všeobecne známe, zišlo aj dokázať, preto sme za absenciu akéhokoľvek zdôvodnenia strhávali body.

Obdržali sme tiež veľký počet riešení, v ktorých ste prvotný rozklad na súčin doriešili skúšaním všetkých deliteľov čísla 900. Vyskúšať konečný spôsob možností je samozrejme validný a správny spôsob riešenia. My však veríme, že je dobré sa zamyslieť, či sa úloha nedá vyriešiť aj krajšie, pretože to môže aj vás matematicky viac posunúť a môžete mať z takého riešenia väčšiu radosť a to je (veríme) to, kvôli čomu riešite STROM. To rozhodne nie je výčitka, skôr podnet na zamyslenie sa pri riešení podobných úloh. Pokiaľ sa už rozhodnete skúšať možnosti, je dobré vypísať ich všetky do riešenia, aby bolo opravovateľom jasné, že ste ich naozaj všetky vyskúšali.

Častou chybou pri skúšaní možností je, že na nejakú zabudneme, čo sa niektorým stalo aj tu. V súčine $900 = (a - 30)(b - 30)$ nemôžeme predpokladať kladnosť obidvoch zátvoriek na pravej strane, preto sme riešiteľom, ktorí neoverili aj možnosti, že by boli obe zátvorky záporné, alebo nezdôvodnili, že sa nimi netreba zaoberať, museli strhnúť bod.