2. ÚLOHA

Opravovali: **Braňo Ječim** & **Martin "Iskra" Dudjak**

Najkrajšie riešenie: **Ala Bálintová**

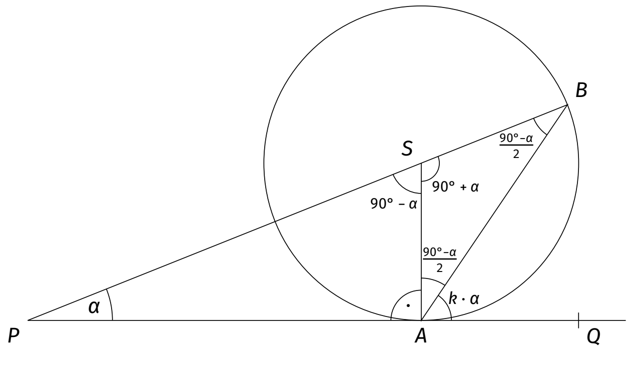
Počet riešení: **31**

ZADANIE

Škvrna od vína má tvar kružnice so stredom S. Úsečka PQ je jej dotyčnicou, bod dotyku označme A, ktorý sa nachádza medzi P a Q. Nech B je prienik priamky PS a kružnice taký, že S leží medzi P a B. Multiplianglos si všimol, že veľkosť uhla APB v stupňoch je kladné celé číslo a veľkosť uhla BAQ v stupňoch je jeho k–násobok, pričom k je tiež kladné celé číslo. Akú najväčšiu hodnotu môže mať k?

VZOROVÉ RIEŠENIE

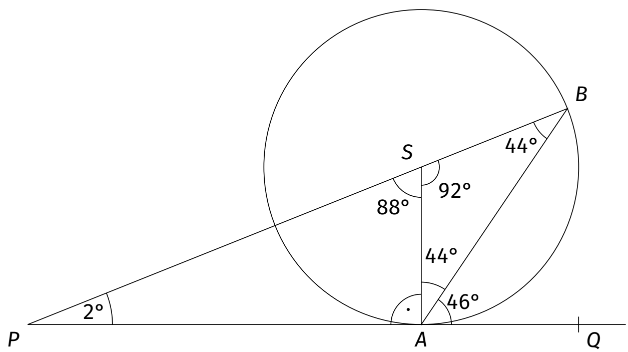
Začneme s tým, že si veľkosť uhla APB označíme ako $|\angle APB| = \alpha$ a veľkosť uhla BAQ ako $|\angle BAQ| = k \cdot \alpha$. Uhol PAS je pravý, keďže A je bodom dotyku kružnice so stredom S. Potom platí, že $|\angle PSA| = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Uhol ASB je susedný k uhlu PSA, a preto jeho veľkosť možno vyjadriť ako $|\angle ASB| = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$. Úsečky SA a SB sú obe polomery kružnice so stredom v bode S, trojuholník ASB je preto rovnoramenný so základňou AB. Platí $|\angle SBA| = |\angle SAB| = \frac{180°-(90°+\alpha)}{2} = \frac{90°-\alpha}{2}$.



Keďže sme si vyjadrili veľkosti uhlov *PAS*, *SAB* a *BAQ*, vieme si priamy uhol *PAQ* vyjadriť ako súčet spomínaných troch uhlov a ten ďalej upravujeme:

$$|\angle PAS| + |\angle SAB| + |\angle BAQ| = |\angle PAQ|$$
$$90° + \frac{90° - \alpha}{2} + k \cdot \alpha = 180°$$
$$90° + 45° - \frac{\alpha}{2} + k \cdot \alpha = 180°$$
$$k \cdot \alpha - \frac{\alpha}{2} = 45°$$
$$2k \cdot \alpha - \alpha = 90°$$
$$(2k - 1) \cdot \alpha = 90°$$

Keďže sú k aj α celé čísla, číslo $2k-1$ bude nepárne. Chceme nájsť najväčšiu možnú hodnotu k, teda chceme maximalizovať aj $2k - 1$. Vieme, že $2k - 1$ je nepárny deliteľ čísla 90 a najväčší taký deliteľ je 45. Ak platí $2k - 1 = 45$, potom $k = 23$ a $\alpha = 2$, takže $|\angle APB| = 2°$ a $|\angle BAQ| = 46°$. Na ilustračnom obrázku môžeme vidieť veľkosti všetkých vyjadrených uhlov v riešení pre $|\angle APB| = 2°$ a $|\angle BAQ| = 46°$.



KOMENTÁR

Veľmi sa tešíme veľkému počtu 9-bodových riešení tejto úlohy. Väčšina riešení sa dostala k rovnici podobnej tej vo vzorovom riešení, ale niektoré boli v iných tvaroch. Potom pre Vás nemuselo byť úplne jednoduché jasne odôvodniť, prečo chceme minimalizovať α, preto si vždy skúste upraviť rovnicu do tvaru, z ktorého je taký vzťah jasnejší.