3. ÚLOHA

Opravoval: **Erik Novák**

Najkrajšie riešenia: **Všetky 9-bodové riešenia**

Počet riešení: **32**

ZADANIE

Číslo nazývame olivové ak je v tvare $p^6 - 14p^2 + 13$, pričom p označuje prvočíslo, ktoré je väčšie ako 7. Nájdite najväčšieho spoločného deliteľa všetkých olivových čísel.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Vypočítajme hodnoty prvých dvoch olivových čísel, teda pre $p = 11$ a $p = 13$.

$$p = 11 \implies 11^6 - 14 \cdot 11^2 + 13 = 1769880$$

$$p = 13 \implies 13^6 - 14 \cdot 13^2 + 13 = 4824456$$

Keď vypočítame pre tieto dve olivové čísla ich najväčšieho spoločného deliteľa, dostaneme horný odhad pre najväčšieho spoločného deliteľa všetkých olivových čísel. Prirodzene, ak nejaké prvočíslo nedelí prvé dve olivové čísla, nedelí ani všetky, čiže $NSD(1769880, 4824456)$ je najväčšie číslo, aké môže byť našou hľadanou odpoveďou.

Hoci sa jedná iba o aritmetický krok, ukážeme si, ako by sa dal jednoducho vypočítať najväčší spoločný deliteľ pre tak veľké čísla. Použijeme Euklidov algoritmus. Od väčšieho čísla budeme odčítavať to menšie, kým nedosiahneme, že sa jedno číslo rovná nule. V tomto momente bude naše druhé číslo rovné najväčšiemu spoločnému deliteľovi pôvodných dvoch čísel.

Prvé číslo (A)	Druhé číslo (B)	Operácia
1769880	4824456	$B := B - 2 \cdot A$
1769880	1284696	$A := A - B$
485184	1284696	$B := B - 2 \cdot A$
485184	314328	$A := A - B$
170856	314328	$B := B - A$
170856	143472	$A := A - B$
27384	143472	$B := B - 5 \cdot A$
27384	6552	$A := A - 4 \cdot B$
1176	6552	$B := B - 5 \cdot A$
1176	672	$A := A - B$
504	672	$B := B - A$
504	168	$A := A - 3 \cdot B$
0	168	-

Teraz vieme, že najväčší spoločný deliteľ všetkých olivových čísel je nanajvýš 168. Ukážme, že 168 aj naozaj delí všetky olivové čísla. Platí $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Potrebujeme teda ukázať, že každé olivové číslo je deliteľné týmito tromi členmi rozkladu.

Pomôžeme si tým, že sa zamyslíme nad tvarom olivových čísel ako nad polynómom bez obmedzenia, že p je prvočíslo. Všimnime si, že pre $p = 1$ a $p = -1$ dostávame v oboch prípadoch $1 - 14 + 13 = 0$. Môžeme teda tvar olivových čísel rozložiť vyňatím dvoch koreňových zátvoriek.

$$p^6 - 14p^2 + 13 = (p^4 + p^2 - 13) \cdot (p + 1) \cdot (p - 1)$$

- Deliteľnosť 2^3
  p je prvočíslo väčšie ako 2, teda je určite nepárne. Má preto zvyšok 1 po delení dvojkou, takže zátvorky $(p+1)$ aj $(p-1)$ sú deliteľné dvojkou. Zároveň má ale určite zvyšok 1 alebo 3 po delení štvorkou. Ak má zvyšok 1, tak zátvorka $(p - 1)$ je deliteľná štvorkou a ak 3, tak zátvorka $(p + 1)$ je deliteľná štvorkou. V súčine sa preto určite nachádza jedna zátvorka deliteľná dvojkou a jedna ďalšia deliteľná štvorkou. To znamená, že každé olivové číslo je deliteľné $2 \cdot 4 = 2^3$.

- <u>Deliteľnosť 3</u>
  p je prvočíslo väčšie ako 3, teda určite nie je deliteľné trojkou. Ak má zvyšok 1 po delení trojkou, zátvorka (p - 1) je deliteľná trojkou. Ak má zvyšok 2 po delení trojkou, zátvorka (p + 1) je deliteľná trojkou. Každé olivové číslo je preto deliteľné trojkou.

- <u>Deliteľnosť 7</u>
  p je prvočíslo väčšie ako 7, teda určite nie je deliteľné ani sedmičkou. Ak má zvyšok po delení sedmičkou 1 alebo 6, jedna zo zátvoriek (p - 1) a (p + 1) je deliteľná sedmičkou. Pozrime sa na ostatné 4 možné zvyšky. (znak ≡ značí kongruenciu - rovnosť zvyškov po delení daným číslom, v našom prípade sedmičkou)

  - $p \equiv 2\ mod_7$
    Potom $p^4 \equiv 2^4 \equiv 2\ mod_7$ a $p^2 \equiv 2^2 \equiv 4\ mod_7$, takže zátvorka $(p^4 + p^2 - 13) \equiv 2 + 4 - 13 \equiv -7 \equiv 0\ mod_7$.

  - $p \equiv 3\ mod_7$
    Potom $p^4 \equiv 3^4 \equiv 4\ mod_7$ a $p^2 \equiv 3^2 \equiv 2\ mod_7$, takže zátvorka $(p^4 + p^2 - 13) \equiv 4 + 2 - 13 \equiv -7 \equiv 0\ mod_7$.

  - $p \equiv 4\ mod_7$
    Potom $p^4 \equiv 4^4 \equiv 4\ mod_7$ a $p^2 \equiv 4^2 \equiv 2\ mod_7$, takže zátvorka $(p^4 + p^2 - 13) \equiv 4 + 2 - 13 \equiv -7 \equiv 0\ mod_7$.

  - $p \equiv 5\ mod_7$
    Potom $p^4 \equiv 5^4 \equiv 2\ mod_7$ a $p^2 \equiv 5^2 \equiv 4\ mod_7$, takže zátvorka $(p^4 + p^2 - 13) \equiv 2 + 4 - 13 \equiv -7 \equiv 0\ mod_7$.

  Nezáležiac od zvyšku p po delení siedmimi je každé olivové číslo deliteľné sedmičkou.

Ukázali sme, že každé olivové číslo je deliteľné 168 a zároveň, že najväčší spoločný deliteľ všetkých olivových čísel nemôže byť väčší ako 168, preto práve 168 je hľadaným najväčším spoločným deliteľom všetkých olivových čísel.

INÉ RIEŠENIE

Postupujeme analogicky, no deliteľnosť všetkých olivových čísel sedmičkou ukážeme pomocou malej Fermatovej vety.

Tá vraví, že pre ľubovoľné prvočíslo p a ľubovoľné celé číslo a nedeliteľné p platí:

$$a^{p-1} \equiv 1\ mod_p$$

Dosaďme p = 7 a za a dosaďme naše p zo zadania, ktoré zjavne nie je deliteľné 7, keďže je to prvočíslo väčšie ako 7. Potom môžeme upravovať:

$$p^{7-1} \equiv 1\ mod_7$$

$$p^6 \equiv 1\ mod_7$$

$$p^6 - 14p^2 \equiv 1\ mod_7$$

$$p^6 - 14p^2 + 13 \equiv 0\ mod_7$$

To je tvar olivových čísel zo zadania. Ukázali sme pomocou malej Fermatovej vety, že všetky olivové čísla sú deliteľné sedmičkou.