

4. ÚLOHA

Opravovali: **Matúš Libák & Tomáš Sukeľ**

Najkrajšie riešenia: **Martin Vrba**

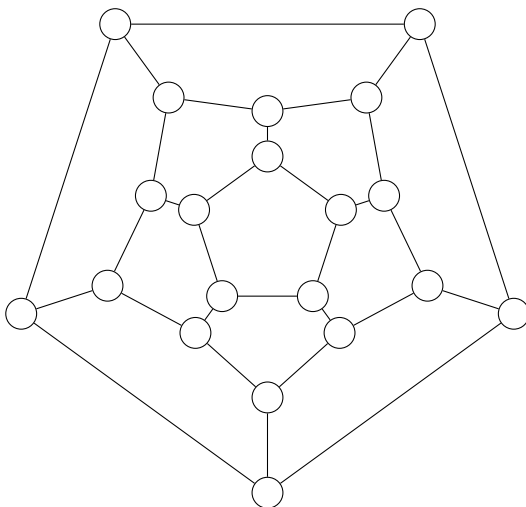
Počet riešení: **11**

ZADANIE

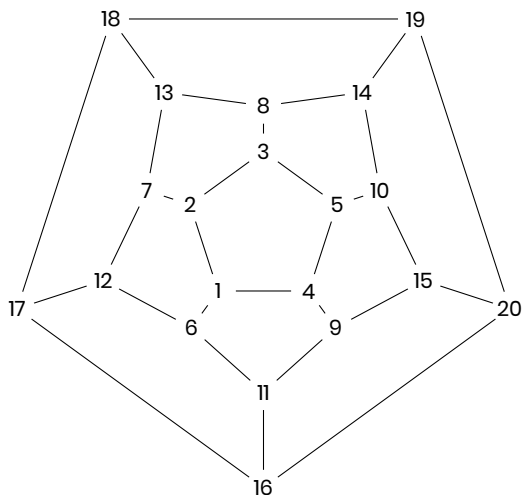
Hedronos má pravidelný dvanásťsten, ktorého 20 vrcholov označil rôznymi kladnými celými číslami. Vertesigmos každú z hrán označil číslom $|a - b|$, kde a a b sú čísla vo vrcholoch hrany. Označme k najväčšiu hodnotu na hrane. Aké najmenšie k mohol Vertesigmos dosiahnuť?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Aby sme nemuseli o Hedronovom dvanásťstene rozmýšľať v trojrozmernom priestore, prekreslíme si ho ako dvojrozmerný graf, v ktorom každý vrchol predstavuje vrchol dvanásťstena a každá hrana predstavuje hranu dvanásťstena:

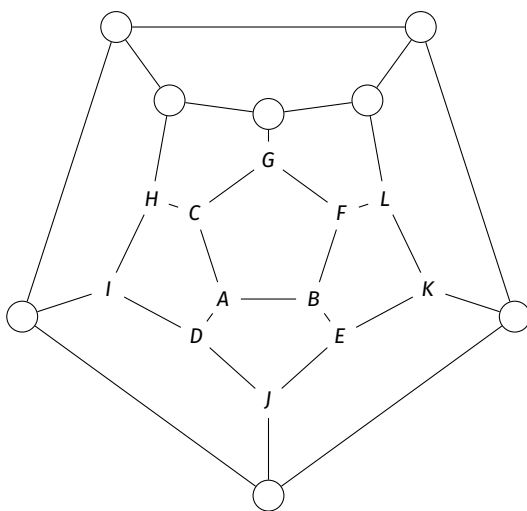


Ukážme, prečo najmenšie k , ktoré mohol dosiahnuť je 6. Jedna konkrétna konštrukcia pre $k = 6$ je napríklad takáto:



Teraz je potrebné ešte ukázať, prečo pre $k < 6$ nie je možné vytvoriť konštrukciu. Stačí zrejme dokázať, že pre $k = 5$ nie je možné vytvoriť konštrukciu.

Označme najmenšie číslo na vrcholoch grafu A a ďalšie niektoré čísla vo vrcholoch podľa obrázku:



Čísla B, C, D patria tým vrcholom, ktoré zdieľajú hranu s vrcholom s číslom A . Čísla E, F, G, H, I, J patria tým vrcholom, ktoré zdieľajú hranu s vrcholmi s číslami B, C, D postupne (teda majú od vrcholu s číslom A najmenšiu vzdialenosť 2 hrany). Čísla K, L patria tým vrcholom, ktoré zdieľajú hranu s vrcholmi s číslami E, F postupne (a nie sú zatiaľ označené).

Keďže A je najmenšie číslo vo vrcholoch grafu, čísla B, C, D musia byť z množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$. Čísla E, F, G, H, I, J zdieľajú hranu s číslami B, C, D , takže najväčšie z nich môže byť najviac $A + 5 + 5 = A + 10$, zatiaľ čo najmenšie z nich môže byť najmenej $A + 1$ (keďže menšie ani rovné číslo A byť nemôže). Tým pádom musia byť čísla E, F, G, H, I, J z množiny $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$.

Keďže čísel E, F, G, H, I, J je 6, aspoň jedno z nich musí patriť do množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$. Keďže všetky sú rovnako vzdialené od vrcholu s číslom A , bez ujmy na všeobecnosti povedzme, že ide o číslo E .

Číslo E zdieľa hranu s číslom K . Keďže E patrí do množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$, číslo K musí patriť do množiny $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$. Tým pádom sú všetky čísla $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$ priradené číslam B, C, \dots, K .

Pozrime sa na prípad, že by okrem E ešte niektoré z čísel F, G, H, I, J patrilo do množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$ – z rovnakého dôvodu ako pri čísle E môžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, že ide o číslo F .

Číslo F zdieľa hranu s číslom L . Keďže F patrí do množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$, číslo L musí patriť do množiny $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$. Z tejto množiny ale neostalo žiadne nepriradené číslo, čiže takáto situácia nastať nemôže. Tým pádom žiadne z čísel F, G, H, I, J nemôže patriť do množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$, takže každému z nich je priradené číslo z množiny $\{A + 6; A + 7; A + 8; A + 9; A + 10\}$. Z toho vyplýva, že číslo K musí byť z množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$.

Keďže K je z množiny $\{A + 1; A + 2; A + 3; A + 4; A + 5\}$, všetky čísla susediace s týmto číslom musia byť z množiny $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$. Číslo K ale susedí s dvoma číslami, ktoré nie sú z čísel B, C, \dots, K , takže ich hodnota nie je z množiny $\{A + 1; A + 2; \dots; A + 10\}$.

Došli sme k sporu, čiže pre $k = 5$ a ani $k < 5$ neexistuje konštrukcia. Tým pádom $k = 6$ je skutočne najmenšia hodnota, akú vedel Vertesigmos získať.