

5. ÚLOHA

Opravovali: **Oliver Seman & Ondrej Králik**

Najkrajšie riešenie: **Michal Ferdinandy**

Počet riešení: **10**

ZADANIE

Podlaha chrámu je mriežka, ktorá má r riadkov a s stĺpcov, pričom $r < s$, a je pokrytá 1×1 dlaždicami. Sparťania pri poslednom útoku na chrám poškodili niektoré dlaždice, a to tak, že v každom stĺpci je poškodená aspoň jedna. Dokážte, že existuje aspoň jedna taká poškodená dlaždica, že riadok, v ktorom sa nachádza, má dokopy viac poškodených dlaždíc ako stĺpec, v ktorom sa nachádza.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Dokážme tvrdenie sporom. Predpokladajme, že neexistuje hľadaná dlaždica. Každú poškodenú dlaždicu označme ako (i, j) , kde i je číslo stĺpca zľava a j číslo riadku zhora, v ktorom sa nachádza táto dlaždica. Nech P je množina všetkých poškodených dlaždíc, s_i je počet poškodených dlaždíc v i -tom stĺpci a r_j počet poškodených dlaždíc v j -tom riadku.

Potom pre každú poškodenú dlaždicu nachádzajúcu sa v i -tom stĺpci a j -tom riadku platí $s_i \geq r_j$. Keďže v dotyčnom riadku aj stĺpci je aspoň jedna poškodená dlaždica, tak $s_i r_j$ je kladné a môžeme ním celú nerovnicu vdeliť, čím dostávame:

$$\frac{1}{r_j} \geq \frac{1}{s_i}$$

Takúto nerovnicu zostavme pre každú poškodenú dlaždicu a všetky ich sčítajme, aby sme dostali jednu nerovnicu:

$$\sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{r_j} \geq \sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{s_i}$$

Pozrime sa na konkrétny riadok j . Ak neobsahuje žiadnu poškodenú dlaždicu, do súčtu na ľavej strane neprispieva. Ak naopak nejakú poškodenú dlaždicu obsahuje, tak sa do súčtu na ľavej strane nerovnice r_j -krát pripočíta $\frac{1}{r_j}$, spolu teda $r_j \cdot \frac{1}{r_j} = 1$. Za každý riadok sa tak k ľavej strane pripočíta 0 alebo 1, ľavá strana je teda najviac r .

Na pravej strane sa deje to isté, akurát so stĺpcami. Podľa zadania ale neexistuje stĺpec bez poškodenej dlaždice, pre každý stĺpec i sa teda ku pravej strane nerovnice pripočíta $s_i \cdot \frac{1}{s_i} = 1$. Pravá strana je tak rovná počtu stĺpcov, teda s .

Po týchto úpravách tak dostávame:

$$r \geq \sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{r_j} \geq \sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{s_i} = s$$

Zo vzťahu vyššie teda vyplýva $r \geq s$. Podľa zadania ale $r < s$, kvôli čomu dostávame spor so zadaním a náš predpoklad musel byť nesprávny. Musí tak existovať taká poškodená dlaždica, že riadok, v ktorom sa nachádza, má dokopy viac poškodených dlaždíc ako stĺpec, v ktorom sa nachádza.