

6. ÚLOHA

Opravovali: **Bianka Gurská & Evka Krajčiová**

Najkrajšie riešenia: **Richard Semanišin & Michal Vodička**

Počet riešení: **15**

ZADANIE

Strecha chrámu má pri pohľade zhora tvar trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C . Bod D leží vo vnútri trojuholníka ABC a na kružnici so stredom v bode B , ktorá prechádza bodom C . Bod E leží na strane AB tak, že $|\angle DAB| = |\angle BDE|$. Kružnica so stredom v bode A , ktorá prechádza bodom C , pretína priamku prechádzajúcu bodmi D a E v bode F , kde bod E leží medzi bodmi D a F . Dokážte, že $|\angle AFE| = |\angle EBF|$.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Uvedomme si, že podľa vety uu sú trojuholníky BAD a BDE podobné, keďže:

- $|\angle DAB| = |\angle BDE|$ zo zadania;
- $|\angle ABD| = |\angle DBE|$, keďže sú totožné.

Z tejto podobnosti potom vyplýva rovnosť:

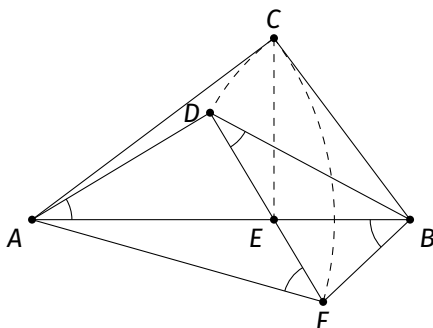
$$\frac{|BA|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|BE|}$$

Zo zadania kružnica so stredom v bode B prechádzajúca bodom C prechádza aj bodom D . Z toho $|BC| = |BD|$, a teda po nahradení vo vyššie uvedenej rovnosti:

$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BE|}$$

Z tejto rovnosti a z totožnosti uhlov $\angle ABC$ a $\angle CBE$ sú potom trojuholníky ABC a CBE podľa vety sus podobné.

Potom platí $|\angle ACB| = |\angle CEB| = 90^\circ$, čiže bod E je pätou kolmice z C na AB .



Potom sú podľa vety *uu* aj trojuholníky ABC a ACE podobné, keďže:

- $|\angle ACB| = |\angle CEB| = 90^\circ$;
- $|\angle BAC| = |\angle CAE|$, keďže sú totožné.

Z tejto podobnosti potom vyplýva rovnosť:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AE|}$$

(Pozn.: po vynásobení oboch strán výrazom $|AC| \cdot |AE|$ je táto rovnosť v pravouhlom trojuholníku známa aj ako Euklidova veta o odvesne.)

Zo zadania kružnica so stredom v bode A prechádzajúca bodom C prechádza aj bodom F . Z toho $|AC| = |AF|$, a teda po nahradení vo vyššie uvedenej rovnosti:

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|AE|}$$

Z tejto rovnosti a z totožnosti uhlov $\angle BAF$ a $\angle FAE$ sú potom trojuholníky ABF a AFE podľa vety *sus* podobné.

Teda $|\angle AFE| = |\angle ABF|$, a keďže $\angle ABF$ a $\angle EBF$ sú totožné, tak $|\angle AFE| = |\angle EBF|$.