

# 1. ÚLOHA

Opravovali: **Katka Farbulová & Erik Novák**

Najkrajšie riešenie: **Jakub Matracz**

Počet riešení: **32**

## ZADANIE

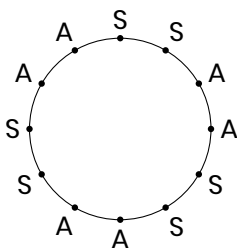
Okolo okrúhleho stola sedí  $2n$  Grékov, z toho polovica Spartania a polovica Aténčania. Koľko najviac Grékov v závislosti od  $n$  môže sedieť vedľa Aténčana?

## VZOROVÉ RIEŠENIE

Rozdeľme úlohu na prípad, kedy  $n$  je párne, a na prípad, kedy  $n$  je nepárne.

Nech  $n$  je párne.

Zapíšme  $n$  ako  $2k$  pre nezáporné celé  $k$ . Potom môžeme rozdeliť  $2k$  Aténčanov na  $k$  dvojíc a pomedzi ne povkladať  $k$  dvojíc Spartanov, ako na obrázku pre  $n = 6$ .



Vidíme, že každý Grék sedí vedľa Aténčana, keďže Aténčania sú v dvojiciach a od každého Spartanu je v jednom smere Spartan a v druhom dvojica Aténčanov.

Nech  $n$  je nepárne.

Najprv ukážme, že nevieme zabezpečiť, aby  $2n$  Grékov sedelo vedľa Aténčana.

Zapíšme  $n$  ako  $2k + 1$  pre nezáporné celé  $k$ . Všimnime si, že ak má každý Aténčan sedieť vedľa Aténčana, musia Aténčania okolo stola byť zoskupení do skupín aspoň dvoch po sebe idúcich Aténčanov (ak by bol Aténčan v skupine sám, bol by obklopený dvoma Sparťanmi, teda by nesedel vedľa Aténčana). Keďže Aténčanov je  $2k + 1$  a každá skupina má aspoň dvoch, počet skupín Aténčanov bude najviac  $k$ .

Rozmiestnime okolo stola najprv skupiny Aténčanov a potom na prázdne miesta (do medzier medzi skupinami) umiestňujeme Sparťanov.

Keďže skupín Aténčanov je najviac  $k$ , medzi skupinami je najviac  $k$  medzier, do ktorých potrebujeme umiestniť  $2k+1$  Sparťanov. Z Dirichletovho princípu bude teda existovať medzera, v ktorej sú aspoň traja Sparťania. To ale znamená, že stredný z týchto troch Sparťanov nesedí vedľa Aténčana.

Vidíme, že znížením počtu skupín Aténčanov iba znížime počet medzier na ešte menej ako  $k$ , a teda z Dirichletovho princípu vyplynie rovnaký záver.

Teda najväčší počet Grékov, ktorí môžu sedieť vedľa Aténčana pre nepárne  $n$  nikdy nebude  $2n$ . Ukážme rozloženie, pre ktoré bude vedľa Aténčana vždy sedieť najbližší menší počet, teda  $2n - 1$ .

Grékov umiestnime rovnako, ako v prípade pre párne  $n$ , iba nám na konci ostane jeden Aténčan a jeden Sparťan. Z tých bude Aténčan ako jediný nesedieť vedľa Aténčana. Na obrázku je prípad pre  $n = 5$ .

