2. ÚLOHA

Opravovali: **Martin Šmilňák** & **Števo Vašak**

Najkrajšie riešenia: **Ján „Johnny“ Meteňko**

Počet riešení: **23**

ZADANIE

Series sa hrá s konečnými postupnosťami kladných celých čísel, a to tak, že do nich na ľubovoľné miesto vkladá alebo z ľubovoľného miesta odoberá dve zhodné susediace podpostupnosti. Napríklad z (5, 4) vie vyrobiť (5, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4) a naopak, alebo z (1) vie vyrobiť (1, 1, 1, 1, 1) a naopak. Dokážte, že Series vie z ľubovoľnej konečnej postupnosti spraviť rastúcu.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Všimnime si, že pomocou operácií zo zadania vieme zameniť ľubovoľné dva susedné členy postupnosti. Takúto operáciu následne budeme s výhodou vedieť využiť na zoradenie postupnosti.

Majme dva susedné členy postupnosti – AB. Pridajme podpostupnosti BB a AA pred a za našu dvojicu, následne odstráňme opakujúce sa podpostupnosti BA.

$$\ldots\mathbf{AB}\ldots \to \ldots BB\mathbf{AB}AA\ldots \to \ldots B\cancel{B}\cancel{\mathbf{A}}\cancel{\mathbf{B}}\cancel{A}A\ldots \to \ldots BA\ldots$$

Teraz popíšme postup, pomocou ktorého zoradíme ľubovoľnú postupnosť zamieňaním susedných členov. Pomyselne si rozdelíme postupnosť na nezoradenú časť naľavo a zoradenú časť napravo:

1. Nájdime najväčší (alebo jeden z najväčších, ak ich je viac), doposiaľ nezoradený člen.
2. Ak je na konci doposiaľ nezoradenej časti postupnosti, označíme ho za zoradený a pokračujeme 1. bodom. Ak nie, ideme ho zoradiť.

3. Tento člen postupne vymieňame so všetkými doposiaľ nezoradenými členmi napravo od neho až pokým nie je najpravejším nezoradeným členom.
4. Označíme ho za zoradený a pokračujeme 1. bodom.

Ak tento postup postupne zopakujeme s každým členom postupnosti, na konci budeme mať zoradenú, neklesajúcu postupnosť.

Tento postup zároveň určite vykonáme v konečnom počte krokov, pretože vykonáme presne jednu jeho iteráciu za každý jeho člen, ktorých je zo zadania konečne veľa.

Teraz máme neklesajúcu postupnosť. Problémom je, že sa nám v nej môžu členy opakovať, čo porušuje to, že má byť rastúca. Opakujúce sa členy na susedných pozíciách však vieme ľahko odstrániť, vždy po dvojiciach členov, čo nám zadanie dovoľuje. Ak ich je párny počet, úplne nám tieto členy z postupnosti vymiznú. Ak je ich nepárny počet, nakoniec nám zostane jeden člen, ktorý bude v rámci postupnosti správne zoradený.

INÉ RIEŠENIE

Ukážme si ešte iný spôsob, ako sa dalo dokázať, že pomocou vymieňania dvoch susedných členov vieme z ľubovoľnej postupnosti urobiť neklesajúcu.

Použijeme na to indukciu. Ako bázu si stačí všimnúť, že každá 0, respektíve 1-prvková postupnosť je automaticky neklesajúca.

Ďalej predpokladajme, že máme spôsob, akým vieme zoradiť ľubovoľnú n-prvkovú postupnosť na neklesajúcu. Chceme ukázať, že potom to ide aj pre $(n + 1)$-prvkovú.

Majme teda ľubovoľnú $(n + 1)$-prvkovú postupnosť a aplikujme nasledujúci postup. Najprv pomocou indukčného predpokladu zoraďme prvých n členov. V prípade, že je potom $(n + 1)$-vý člen postupnosti väčší alebo rovný n-tému, sme hotoví. V opačnom prípade najprv vymeníme n-tý člen s $(n + 1)$-vým, po čom máme garantované, že nový $(n + 1)$-vý člen postupnosti je v nej najväčší (alebo jedným z najväčších). Následne už len opäť zoradíme prvých n členov pomocou indukčného predpokladu a dostaneme tak výslednú neklesajúcu postupnosť.