

3. ÚLOHA

Opravovali: **Samo Šandor & Braňo Ječim**

Najkrajšie riešenia: **Jakub Stramba & Richard Semanišin**

Počet riešení: **20**

ZADANIE

Prístav je tvaru štvorca $ABCD$. Lumomoros chce postaviť maják v bode M a to tak, aby existoval rovnoramenný pravouhlý trojuholník AMN s pravým uhlom pri vrchole M a bod N ležal na strane CD . Nájdite množinu všetkých možných polôh majáku a dokažte, že pre každý bod nájdenej množiny taký trojuholník existuje.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Na začiatok si označme S stred štvorca $ABCD$ a S' priemet bodu S cez priamku AD . Ďalej, ak v riešení hovoríme, že nejaký bod leží v nejakom uhle, pripúšťame aj možnosť, že leží na jeho ramenách. Zo zadania o trojuholníku AMN , ľahko odvodíme, že $|\sphericalangle AMN| = 90^\circ$, $|\sphericalangle ANM| = 45^\circ$ a $|\sphericalangle MAN| = 45^\circ$ (nakolko je rovnoramenný a pravouhlý).

Majme nejakú vyhovujúcu konštrukciu. Urobíme jedno veľmi dôležité pozorovanie – uvedomíme si, že máme zostrojiť bod M , z ktorého vidíme úsečku AN pod pravým uhlom (teda $\sphericalangle AMN$ je pravý). Rovnako ju však vidíme pod pravým uhlom aj z bodu D , nakolko bod N leží na DC (pokiaľ $N \neq D$, $N = D$ je degenerovaný prípad, ktorý vyriešime osobitne). Teda aj bod M aj bod D musia ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom AN , teda body A, D, M, N ležia (v nejakom poradí) na kružnici.

Rozlíšme prípady podľa polohy bodu M :

- Nech M leží v polrovine ADB a zároveň v polrovine ANB t.j. „napravo“ od priamky AD aj od priamky AN . Potom body D, N ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AM a teda z obvodových uhlov nad tetivou AM platí

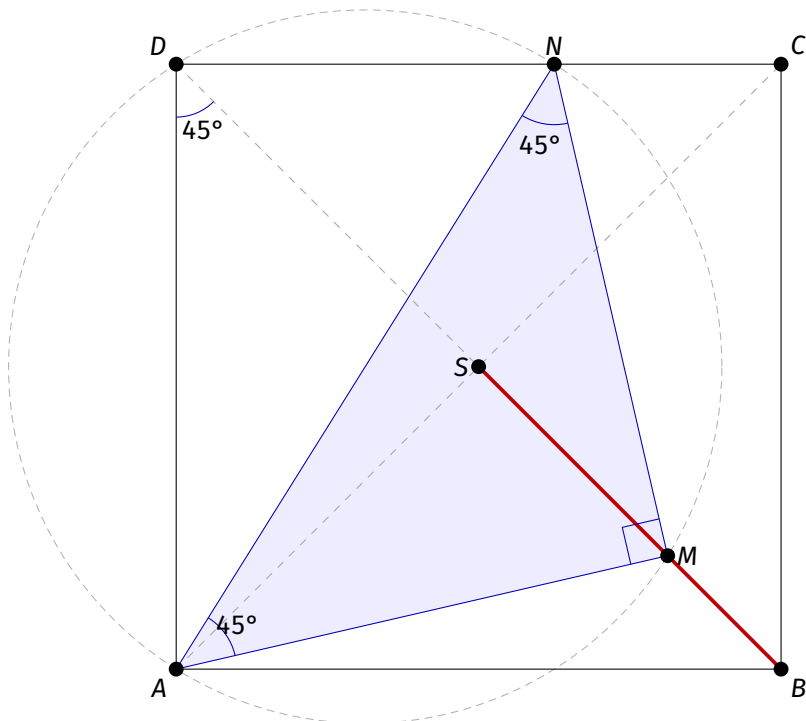
$$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle ANM| = 45^\circ$$

Keďže však vo štvorci platí aj $|\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ a body M, B ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na AD , musí bod M ležať na polpriamke DB .

Pokiaľ bod M leží na úsečke DS , potom leží v uhle CAD . Bod N však musí ležať na úsečke CD , teda v $\sphericalangle CAD = \sphericalangle SAD$. Obidva body M, N teda ležia v uhle CAD o veľkosti 45° . Odtiaľ vieme, že $\sphericalangle MAN$ je podmnožinou $\sphericalangle CAD$, teda má veľkosť najviac 45° , a táto rovnosť sa nadobúda práve vtedy, ak body M a N ležia na ramenách uhla CAD . Teda buď M leží na priamke AC a N leží na priamke AD , čiže M musí nutne ležať v priesečníku AC a DS , teda v bode S , alebo M leží na priamke AD a N leží na priamke AC , teda M musí ležať v bode D . Všetky ostatné body úsečky DS nevyhovujú.

Pokiaľ bod M leží na polpriamke opačnej k BD , potom $|\sphericalangle MAC| \geq |\sphericalangle BAC| = 45^\circ$ a keďže N leží v uhle CAD , zrejme aj $|\sphericalangle MAN| \geq 45^\circ$. Rovnosť sa bude nadobúdať práve vtedy, keď M leží na ramene AB uhla BAC a N na ramene AC toho istého uhla, teda $M = B$ a $N = C$. Ostatné body polpriamky opačnej k BD už nevyhovujú.

Ďalej nám z polpriamky DB ostala ešte úsečka SB , o ktorej teraz ukážeme, že celá vyhovuje (o jej krajných bodoch sme to už dokázali). Pokiaľ uvažujeme ľubovoľný bod M na tejto úsečke, otočením AM okolo bodu A o uhol 45° v kladnom smere (v protismere hodinových ručičiek) vznikne bod N ako prienik tejto otočenej priamky s úsečkou CD . Zrejme platí, že $|\sphericalangle MAN| = 45^\circ$ podľa tejto konštrukcie. Vďaka rovnosti uhlov $|\sphericalangle MAN| = |\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle BDC| = 45^\circ$ ležia body A, M, N, D na kružnici. Z toho plynie aj rovnosť obvodových uhlov $|\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle ADM| = 45^\circ$. Teda trojuholník AMN má dva uhly, pri bodoch N a A , s veľkosťou 45° , teda už zrejme je pravouhlý rovnoramenný a vyhovuje požiadavkám zadania.



- Nech M leží v polrovine opačnej k ADB a zároveň v polrovine opačnej k ANB t.j. „naľavo“ od priamky AD aj od priamky AN . Potom body D, N ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AM a teda z obvodových uhlov nad tetivou AM platí

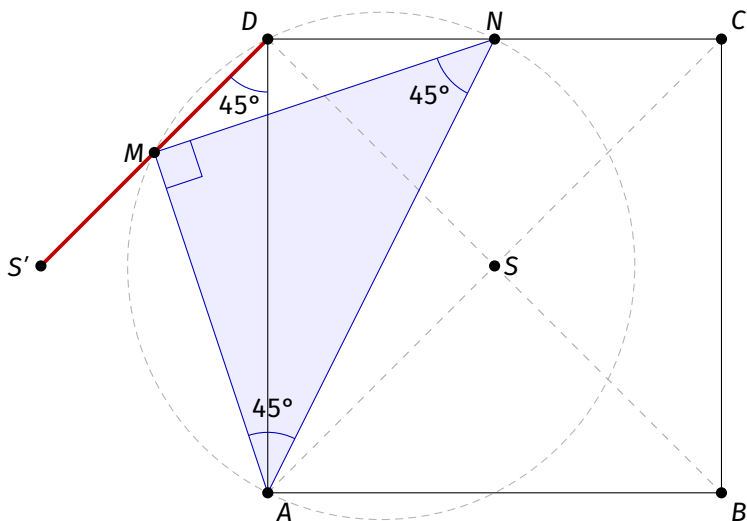
$$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle ANM| = 45^\circ$$

Zároveň bod M musí byť v tomto prípade mimo štvorca (lebo leží v polrovine opačnej k ADB), teda musí nutne ležať na polpriamke DS' .

Pokiaľ bod M leží na polpriamke opačnej k $S'D$, potom leží mimo uhla DAS' , o veľkosti 45° , teda $|\sphericalangle MAD| \geq |\sphericalangle DAS'} = 45^\circ$. Keďže bod N leží v uhle DAC , platí $|\sphericalangle MAN| \geq |\sphericalangle MAD| \geq 45^\circ$, pričom rovnosť sa nadobúda v prípade, keď M a N ležia na ramenách uhla $\sphericalangle S'AD$, teda ak $M = S'$ a $N = D$. Iné body polpriamky opačnej k $S'D$ už nevyhovujú.

Dokážme, že každý bod M na úsečke DS' vyhovuje. Postupujeme analogicky k minulému prípadu, otočíme AM okolo A o uhol 45° v zápor-

nom smere, prienikom s úsečkou CD získame bod N . Keďže $|\sphericalangle MAN| = 45^\circ$ a $|\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle MDA| + |\sphericalangle ADN| = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$, platí, že súčet protíahlých uhlov v štvoruholníku $ANDM$ je 180° , teda je tetivový, odkiaľ už dostaneme rovnosť obvodových uhlov $|\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle ADM| = 45^\circ$, teda uhly v trojuholníku AMN pri vrcholoch N, A majú veľkosť 45° a zrejme vyhovuje zadaniu.



- Ešte ostáva doriešiť prípad, keď bod M leží v polrovine AND a zároveň ADC , resp. v polrovine ANB a zároveň v polrovine opačnej k $A DB$. V tomto prípade body D a N ležia v opačných polrovinách určených priamkou AM , nakoľko však analogicky vďaka Tálesovej vete ležia A, N, M, D na kružnici, platí, že $|\sphericalangle ANM| + |\sphericalangle ADM| = 180^\circ$, odkiaľ $|\sphericalangle ADM| = 180^\circ - |\sphericalangle ANM| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

V tomto prípade tak bod M musí ležať na polpriamke opačnej k DS' . Opäť však musí platiť, že body N a M ležia obidva v uhle CAD , teda $\sphericalangle NAM$ je podmnožinou uhla CAD a teda platí $|\sphericalangle NAM| \leq |\sphericalangle CAD| = 45^\circ$, teda z tohto prípadu dostávame iba $M = D$ a $N = C$ ako riešenie.

Dokopy teda maják, bod M , môže ležať na úsečke BS , alebo na úsečke DS' .

INÉ RIEŠENIE

Úloha sa dala riešiť aj trikovo – pomocou užitočného a trochu netradičného geometrického zobrazenia – *špirálnej podobnosti* (tzv. *špirálky*). Toto zobrazenie je zložením rotácie a rovnofahlosti. Ide o podobné zobrazenie, čiže úsečky sa zobrazujú na úsečky. Stručne teraz popíšeme, ako sa ním dala vyriešiť úloha.

Uvedomme si na úvod, že pomer prepony ku odvesne v hľadanom trojuholníku AMN je $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Všetky možné polohy bodu N tvoria úsečku CD , zobrazíme preto celú túto úsečku v špirálnej podobnosti so stredom v A , uhlom 45° a koeficientom $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zobrazíť môžeme dva krajné body tejto úsečky, ľahko si rozmyslíme, že v jednom smere otočenia sa C zobrazí do B a D do S a v opačnom smere C do D a D do S' . Teda úsečka CD sa zobrazí v jednom prípade na úsečku BS a v druhom na úsečku DS' . Zrejme všetky body na týchto úsečkách fungujú, nakoľko sa táto úsečka dá spätne zobrazíť na úsečku CD , čím pre dané M na jednej z týchto úsečiek dostaneme nejaké N na CD , pričom rovnoramennosť a pravouhlosť trojuholníka ANM bude zaručená z uhlu a koeficientu tejto špirálnej podobnosti.

KOMENTÁR

Úloha sa dala riešiť synteticky, ale aj analyticky a pri oboch prístupoch ste viacerí zabudli na druhú časť poslednej vety zo zadania, a to dokázať, že pre nájdenú množinu bodov vždy daný rovnoramenný trojuholník existuje. Okrem toho sa analytické riešenia v tejto úlohe ukázali byť spoľahlivejšie, ako syntetické. V tých ste sa častokrát odvolávali na fakt, že keď dokážeme, kde bude bod M pre krajné polohy bodu N (t.j. pre $N = C$ a $N = D$), tak potom pre polohy bodu N medzi týmito krajnými polohami, bude bod M vždy na úsečke medzi jeho krajnými polohami. To však nemusí stačiť, keďže bez ďalších tvrdení by to mohla byť aj krivka alebo dlhšia úsečka.