

4. ÚLOHA

Opravovali: **Martin „Iskra“ Dudjak & Erik Novák**

Najkrajšie riešenia: **Richard Prikler & Martina Osuská**

Počet riešení: **17**

ZADANIE

Series má postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_1^\infty$ takú, že $a_1 = 3$ a $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$ pre všetky kladné celé čísla n . Dokážte, že

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2026^{2026}} < \sum_{i=1}^{2026} \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2}.$$

VZOROVÉ RIEŠENIE

Najprv si uvedomme, že každý nový člen postupnosti vzniká vynásobením dvoch čísel väčších ako 1 a pripočítaním k nemu 1. Je teda zjavné, že pre všetky n platí $a_n > 1$. Toto tvrdenie budeme niekoľkokrát potrebovať, preto ho majme na pamäti.

Upravujme rekurentný tvar a_{n+1} až kým nedostaneme vyjadrenie pre $\frac{1}{a_n}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n(a_n - 1) + 1 \\ a_{n+1} - 1 &= a_n(a_n - 1) \\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{1}{a_n(a_n - 1)} \\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{a_n - (a_n - 1)}{a_n(a_n - 1)} \\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{a_n}{a_n(a_n - 1)} - \frac{a_n - 1}{a_n(a_n - 1)} \\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} &= \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

Počas úprav sme mohli deliť zátvorkami práve vďaka faktu $a_n > 1$.

Keď si dosadíme tento tvar pre $\frac{1}{a_n}$ do vyjadrenia sumy, dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{2026} \frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{a_{i+1} - 1}$$

Keď si túto sumu rozpišeme, dostaneme:

$$\frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} - \dots - \frac{1}{a_{2026} - 1} + \frac{1}{a_{2026} - 1} - \frac{1}{a_{2027} - 1}$$

Všimnime si, že súčet všetkých členov okrem prvého a posledného bude 0. Ostáva nám teda:

$$\sum_{i=1}^{2026} \frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{a_{i+1} - 1} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{2027} - 1}$$

Chceme dokázať, že platí:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2026^{2026}} < \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{2027} - 1} < \frac{1}{2}$$

Zo zadania poznáme $a_1 = 3$, preto si môžeme dokazovanú nerovnosť zjednodušiť na:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2026^{2026}} < \frac{1}{3 - 1} - \frac{1}{a_{2027} - 1} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2026^{2026}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{2027} - 1} < \frac{1}{2}$$

Pravá nerovnosť zjavne platí, keďže $a_{2027} > 1$ a teda od $\frac{1}{2}$ je odčítavaný kladný zlomok.

Podme dokázať ľavú nerovnosť. Najprv si ju upravme:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2026^{2026}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{2027} - 1}$$

$$-\frac{1}{2026^{2026}} < -\frac{1}{a_{2027} - 1}$$

$$2026^{2026} < a_{2027} - 1$$

Uvedomme si, že z definície postupnosti platí nasledovná nerovnosť:

$$\begin{aligned}a_{n+1} - 1 &= a_n(a_n - 1) > (a_n - 1)(a_n - 1) = (a_n - 1)^2 \\a_{n+1} - 1 &> (a_n - 1)^2\end{aligned}$$

Teraz ukážme, že pre $n > 1$ platí $a_n - 1 > 2^{2^{n-1}}$. Dokážeme to matematickou indukciou s využitím teraz uvedenej nerovnosti.

Tvrdenie platí pre $n = 2$, keďže $a_2 - 1 = a_1(a_1 - 1) + 1 - 1 = 2 \cdot 3 = 6$ a $6 > 2^{2^1} = 4$.

Nech platí $a_k - 1 > 2^{2^{k-1}}$.

Potom:

$$\begin{aligned}a_{k+1} - 1 &> (a_k - 1)^2 > (2^{2^{k-1}})^2 > 2^{2^k} \\a_{k+1} - 1 &> 2^{2^k}\end{aligned}$$

Vďaka tomuto tvrdeniu jednoducho dokážeme ľavú nerovnosť zo zadania.

Platí $a_{2027} - 1 > 2^{2^{2026}}$

Zároveň platí $2026^{2026} < 2048^{2026} < (2^{11})^{2026} = 2^{22286}$.

Keďže zjavne $22286 < 2^{2026}$, tak platí:

$$2026^{2026} < 2^{22286} < 2^{2^{2026}} < a_{2027} - 1$$

Tým sme dokázali aj ľavú nerovnosť zo zadania.