

## 5. ÚLOHA

Opravovali: **Michal Il'kovič & Matúš Masrna**

Najkrajšie riešenia: **Michal Ferdinandy & Richard Semanišín**

Počet riešení: **10**

### ZADANIE

Spartania majú na mape zvolených 2026 bodov. Zistili, že keď zvolia ľubovoľných 17, je medzi nimi 11 bodov takých, že ich vedú zakryť kruhom s priemerom 1. Aténčania si priniesli kruhy s priemerom 2. Nájdite najmenší počet aténskych kruhov, ktorý vždy stačí na pokrytie všetkých 2026 bodov.

### VZOROVÉ RIEŠENIE

Najprv jednoduchou konštrukciou ukážeme, že určite potrebujeme aspoň 7 kruhov s priemerom 2.

Umiestnime 2020 zo zvolených bodov na kope tak, že sa dajú všetky pokryť jedným kruhom s priemerom 1. Zvyšných 6 bodov umiestnime každý izolovane tak, že bude od zvyšných 2025 vzdialený viac než 2.

Táto konštrukcia vyhovuje zadaniu, lebo ľubovoľná sedemnásť bodov bude obsahovať aspoň 11 z tých 2020 bodov na kope, takže sa dá zakryť kruhom s priemerom 1. Na pokrytie všetkých bodov v tejto situácii zrejme ale potrebujeme minimálne 7 kruhov s priemerom 2.

Teraz ukážeme, že vždy vieme zakryť všetkých 2026 bodov pomocou 7 kruhov s priemerom 2.

Nazvime dvojicu bodov vzdialenú, ak je ich vzdialenosť viac než 1. Vzdialenú dvojicu nevieme zakryť spoločným kruhom s priemerom 1.

Medzi každou sedemnásťcou bodov musí byť 11 takých, že ich vieme zakryť kruhom s priemerom 1. Z toho vyplýva, že neexistuje žiadna osmice bodov, v ktorej je každá dvojica vzdialená, pretože potom by sme v sedemnásťci tvorenej týmito ôsmimi bodmi a ľubovoľnými deviatimi ďalšími bodmi určite nevedeli splniť podmienku zo zadania.

Zoberme si najpočetnejšiu množinu bodov takú, že všetky z nich sú navzájom vzdialené. Pre každý ďalší bod platí, že je vzdialený najviac 1 od niektorého bodu z tejto množiny, inak by do nej patril, čo by bol spor s tým, že je najpočetnejšia.

Preto keď umiestnime kruh s priemerom 2 do každého z bodov tejto množiny (tak, že daný bod bude jeho stredom), pokryjeme všetkých 2026 bodov.

Skôr sme už ukázali, že takáto množina nemôže mať viac ako 7 bodov.