6. ÚLOHA

Opravovali: **Oliver Seman** & **Richard Vodička**& **Bianka Gurská** & **Evka Krajčiová**

Najkrajšie riešenie: **Martin Vrba**

Počet riešení: **10**

ZADANIE

Funkciotos sa hrá s funkciou $f(x) = x^2 - 33x + 19$. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 2$, pre ktoré práve jedno z čísel $f(1), f(2), \dots, f(n)$ je deliteľné číslom n.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Uvedomme si, že pre všetky (nielen) prirodzené x platí $f(x) = f(33 - x)$, keďže:

$$f(33-x) = (33-x)^2 - 33(33-x) + 19$$

$$f(33-x) = 33^2 - 2 \cdot 33x + x^2 - 33^2 + 33x + 19 =$$

$$f(33-x) = x^2 - 33x + 19 =$$

$$f(33-x) = f(x)$$

Teda aj $f(x) \equiv f(33-x) \mod n$ pre všetky prirodzené x (uvažujúc celé $n \geq 2$).

Predpokladajme také n, pre ktoré existuje práve jedno prirodzené číslo x z $[1, n]$ také, že $n | f(x)$. Nech je také x k. Potom teda musí platiť aj $n | f(33 - k)$. A keďže sa na prirodzených číslach z $[1, n]$ určite nachádza číslo kongruentné $33 - k$ (a tým pádom tiež deliteľné n), a keďže je z predpokladu práve jedno takéto vyhovujúce číslo x, a to k, tak musí platiť:

$$k \equiv 33 - k \mod n$$

$$2k - 33 \equiv 0 \mod n$$

Ekvivalentne si upravme predpis funkcie f zo zadania:

$$f(x) = x^2 - 33x + 19$$

$$f(x) = \left(x - \frac{33}{2}\right)^2 - \left(\frac{33}{2}\right)^2 + 19$$

$$f(x) = \left(x - \frac{33}{2}\right)^2 - \frac{1013}{4}$$

$$4f(x) = (2x - 33)^2 - 1013$$

Keďže $n|f(k)$, tak aj $n|4f(k)$. Teda:

$$4f(k) \equiv 0 \mod n$$

$$(2k - 33)^2 - 1013 \equiv 0 \mod n$$

A keďže $2k - 33 \equiv 0 \mod n$, tak aj $1013 \equiv 0 \mod n$, a síce $n|1013$. Keďže $n \geq 2$ a 1013 je prvočíslo, $n = 1013$.

Teda ak existuje vyhovujúce n, musí platiť $n = 1013$. Ukážme, že toto n naozaj vyhovuje.

Nech k je prirodzené číslo v intervale $[1, 1013]$, pre ktoré platí $1013|f(k)$. Teda aj $1013|4f(k)$, z čoho analogicky:

$$(2k - 33)^2 - 1013 \equiv 0 \mod 1013$$

$$(2k - 33)^2 \equiv 0 \mod 1013$$

Ak je a celé číslo a p prvočíslo také, že $a^2 \equiv 0 \mod p$, tak aj $a \equiv 0 \mod p$. Keďže je 1013 prvočíslo, tak potom:

$$(2k - 33) \equiv 0 \mod 1013$$

$$2k \equiv 33 \mod 1013$$

Keďže $1 \leq k \leq 1013$, tak $2 \leq 2k \leq 2 \cdot 1013 < 2 \cdot 1013 + 33$. A keďže $2k \equiv 33 \mod 1013$, rozoberme dve možnosti:

- $2k = 0 \cdot 1013 + 33$. Teda $k = \frac{33}{2}$. To však nie je prirodzené číslo, a teda táto možnosť nevyhovuje.
- $2k = 1 \cdot 1013 + 33$. Teda $k = \frac{1 \cdot 1013 + 33}{2} = 523$.

Teda ak je k prirodzené číslo v intervale $[1, 1013]$, pre ktoré platí $1013|f(k)$, tak k musí byť 523. Zároveň naozaj platí:

$$f(523) = 523^2 - 33 \cdot 523 + 19 = 256289 = 253 \cdot 1013 \equiv 0 \mod 1013$$

Teda pre 1013 existuje práve jedno z čísel $f(1)$ až $f(n)$ je deliteľné 1013.

Zhrnutím dostávame, že existuje jediné prirodzené $n \geq 2$, pre ktoré práve jedno z čísel $f(1)$ až $f(n)$ je ním deliteľné, a to 1013.