

1. ÚLOHA

Opravovali: **Michal Ferdinandy & Richard Prikler**

Najkrajšie riešenia: **Richard Semanišin & Mária Bakerová**

Počet riešení: **55**

ZADANIE

Poarot hľadal všetky štvorciferné čísla končiace číslicou 9 také, že sú deliteľné všetkými svojimi číslicami. Pomôžte mu ich nájsť a dokážte, že iné neexistujú.

Pozn.: Nulou sa deliť nedá.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Najprv zistíme, ktoré cifry sa v hľadaných číslach môžu nachádzať. Nulou deliť nevieme, preto nemôže byť ich súčasťou. Zo zadania vieme, že všetky hľadané čísla končia cifrou 9, čiže sú nepárne. Ak by sa v niektorom hľadanom čísle nachádzala nenulová párna cifra, muselo by ňou byť toto číslo deliteľné. To by znamenalo, že by muselo byť párne, čo však nemôže byť pravda. Cifry 2, 4, 6, 8 sa teda v žiadnom z hľadaných čísel nachádzať nebudú. Cifra 5 sa tam tiež nemôže nachádzať, keďže podľa podmienky deliteľnosti číslom 5 by dané číslo muselo končiť buď cifrou 0, alebo 5, no všetky hľadané končia cifrou 9. Hľadané čísla teda môžu obsahovať len cifry 1, 3, 7 alebo 9.

Keďže podľa zadania obsahujú hľadané čísla na konci cifru 9, musia byť určite deliteľné číslom 9. Vieme, že číslo je deliteľné číslom 9 práve vtedy, keď je ním deliteľný jeho ciferný súčet. Najväčší možný ciferný súčet štvorciferného čísla je $9 + 9 + 9 + 9 = 36$. Minimálny dosiahnuteľný ciferný súčet, ktorý je deliteľný číslom 9, je 18. Ciferný súčet 9 ani 0 dosiahnuť nevieme, keďže všetky Poarotove čísla obsahujú podľa zadania aspoň raz cifru 9 a zvyšné cifry sú nenulové. Ciferný súčet hľadaných čísel musí byť teda aspoň $9 + 1 + 1 + 1 = 12$, čo je viac ako 9 či 0.

Pozrime sa na jednotlivé ciferné súčty deliteľné číslom 9, ktoré vieme dosiahnuť:

- Ciferný súčet 36 môžeme dosiahnuť jedine ako $9 + 9 + 9 + 9 = 36$, keďže 9 je najväčšia cifra a hľadáme štvorciferné číslo. Hľadané číslo s týmto ciferným súčtom teda môže byť jedine 9999. To spĺňa zadanie, keďže je deliteľné číslom 9, čo je zároveň jediná cifra, ktorú obsahuje.
- Ciferný súčet 27 dosiahnuť nevieme. Ako sme zistili vyššie, v hľadaných číslach sa nachádzajú iba nepárne cifry a súčet 4 nepárnych čísel je vždy párný, no 27 je nepárne.
- Ciferný súčet 18 môžeme dosiahnuť rôzne. Ak by Poarotovo číslo okrem cifry 9 na konci malo v sebe ešte ďalšiu cifru 9, bol by jeho ciferný súčet najmenej $9 + 9 + 1 + 1 = 20$, keďže aj jeho zvyšné dve cifry sú nenulové. To je viac ako 18, preto číslo s dvoma ciframi 9 nemôže mať ciferný súčet 18.

Ak by hľadané číslo obsahovalo cifru 7, potom by súčet zvyšných dvoch cifier bol $18 - 9 - 7 = 2$. Súčet 2 vieme dosiahnuť jedine ako súčet dvoch cifier 1. Máme teda kombináciu cifier 1, 1, 7, 9, pričom cifra 9 je v Poarotovych číslach na konci. Keďže je ciferný súčet týchto čísel 18, spĺňajú podmienku deliteľnosti číslom 9. Číslom 1 sú deliteľné všetky čísla, teda stačí overiť iba deliteľnosť číslom 7. Možné čísla sú 1179, 1719 a 7119. Číslom 7 je deliteľné iba číslo 7119.

Poslednou možnosťou, ako dostať ciferný súčet 18, je použitie čísla, ktoré by neobsahovalo cifru 7 ani inú cifru 9 okrem tej na konci. Ciferný súčet 18 chceme dostať ako súčet cifry 9 na konci a troch prvých cifier, ktoré sú buď 1 alebo 3. Všimnime si, že ak by hľadané číslo malo najviac dve cifry 3, bol by jeho ciferný súčet najviac $9 + 3 + 3 + 1 = 16$, teda menej ako 18. Jedinou možnosťou teda je, že bude mať tri cifry 3 a cifru 9 na konci. Ciferný súčet takého čísla je $3 + 3 + 3 + 9 = 18$. Podmienkou deliteľnosti čísla 3 je, že ciferný súčet daného čísla je deliteľný číslom 3. To je splnené, keďže ciferný súčet 18 je deliteľný číslom 3. Posledné yhovujúce číslo je teda 3339.

Čísla, ktoré Poarot hľadá sú teda 9999, 7119 a 3339.

KOMENTÁR

V niekoľkých riešeniach sme sa stretli s vypisovaním množstva možností, čo často nie je ideálny postup. Pri väčšom počte možností sa môže ľahko stať, že niektorú vynecháme alebo sa vo svojom vypisovaní zamotáme, aj keď bolo zo začiatku systematické. Je preto najlepšie si počet možností, ktoré je potrebné vypísať, čo najviac okresať.