

3. ÚLOHA

Opravovali: **Jakub Katrák & Richard Vodička**

Najkrajšie riešenia: **Filip Feher & Kristína Pajtašová**

Počet riešení: **45**

ZADANIE

Herkules písal svoj trojciferný PIN od trezora na klávesnici, kde sú v prvom riadku čísla od 1 do 3, v druhom od 4 do 6 a v treťom od 7 do 9. Poarot mu otočil klávesnicu o 180° (teda prvý riadok je 987), a keď klikal na miesta, na ktoré by klikal pri zadávaní svojho pôvodného PINu, napísal číslo, ktoré bolo celočíselným násobkom pôvodného PINu. Aké všetky PINy mohol mať Herkulov trezor?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Postupne sa pozrieme na to, akým násobkom pôvodného čísla môže byť nové číslo. Ak by bol tento násobok väčší ako 9, tak z trojciferného čísla by sa určite stalo aspoň štvorciferné, čo nemôže nastať.

Pozrime sa na poslednú cifru pôvodného čísla. Vieme povedať, že ak ju vynásobíme nejakým číslom, výsledok bude končiť rovnakou cifrou, ako bude končiť celé číslo, keď ho vynásobíme tým istým číslom. Daný násobok poslednej cifry teda musí končiť jej „otočenou“ cifrou. Takto vieme jednoducho vylúčiť násobky 2, 6 a 8, pretože pre ne žiadna taká cifra neexistuje. Poďme si ostatné postupne rozobrať.

1-násobok

Keďže po vynásobení jednotkou sa cifry nemenia, môžeme mať v čísle iba cifru 5, teda číslo 555.

3-násobok

Znovu sa pozrieme na poslednú cifru. Vieme jednoducho vyskúšať, že jediná cifra, ktorej trojnásobok sa končí jej otočenou cifrou je cifra 5 ($3 \cdot 5 = 15$). Teraz sa pozrieme na druhú cifru. Keďže sme pri násobení poslednej cifry

prešli cez desiatku, tak druhá cifra v novom čísle bude rovná poslednej cifre jej trojnásobku plus 1. Zároveň to však musí byť jej otočená cifra. Lahko si vieme vyskúšať, že to nespĺňa žiadna cifra.

Ani v tomto prípade nám nevyhovuje žiadne číslo.

4-násobok

Podmienku pre poslednú cifru spĺňajú pôvodné cifry 2, 4, 6, 8. Prvou cifrou môže byť len 2, pretože ak by bola prvá cifra 1, po vynásobení štyrmi by sme určite nedostali číslo, ktoré sa začína cifrou 9. Naopak, ak by sa číslo začínalo cifrou väčšou ako 2, po vynásobení štyrmi by bolo určite štvorciferné. Prvá cifra nového čísla teda musí byť 8. To znamená, že druhá cifra musí byť 1 alebo 2, aby sme pri násobení štyrmi neprešli cez desiatku. Máme tak už iba 8 možností a ľahko si overíme, že vyhovuje len možnosť 222.

V tomto prípade nám teda vyhovuje číslo 222, z ktorého dostaneme 888.

5-násobok

Po vynásobení piatimi sa môže číslo končiť iba cifrou 0 alebo 5. Keďže cifru 0 nemôžeme použiť, musí sa nové číslo končiť cifrou 5. To znamená, že aj pôvodné číslo sa musí končiť cifrou 5. Prvá cifra môže byť len 1, pretože ak by prvou cifrou bola cifra väčšia ako 1, výsledkom by bolo štvorciferné číslo (zároveň to znamená, že od tohto momentu sa aj pri väčších násobkoch môžu pôvodné čísla začínať len cifrou 1). Druhá cifra musí byť 8 alebo 9. Ak by sme totiž dosadili cifru menšiu ako 8, tak by sa nám pri postupnom násobení nezvýšili aspoň 4 a prvá cifra výsledku by nebola 9. Z dvojice 185 a 195 vyhovuje číslo 185, pretože 195 sa po vynásobení 5 nerovná 915, ale 975.

V tomto prípade vyhovuje číslo 185, z ktorého dostaneme 925.

7-násobok

Jedinou poslednou cifrou, ktorá vyhovuje, je cifra 5. Na druhom mieste bude sedemnásobok pôvodnej druhej cifry plus 3, čo je zvyšok pri násobení na mieste jednotiek ($5 \cdot 7 = 35$). Lenže žiadna cifra nám po vynásobení a pripočítaní 3 nedá výsledok, ktorý by sa končil jej otočenou cifrou. Teda žiadne číslo v tomto prípade nevyhovuje.

9-násobok

Vieme, že prvá cifra je 1 a druhá ani tretia cifra nemôže byť väčšia ako jeden, pretože by výsledné číslo bolo štvorciferné (napríklad číslo $112 \cdot 9$ je 1008, a čím zvolíme väčšie číslo, tým bude väčší výsledok). Jediným takým číslom je teda 111, ktoré zároveň vyhovuje.

Celkovo teda dostávame 4 riešenia, a to 111, 185, 222, 555.

INÉ RIEŠENIE

Úlohu vieme riešiť aj bez rozoberania veľkého množstva možností. Označme si cifry pôvodného čísla A, B, C . Potom pôvodné číslo vieme zapísať ako \overline{ABC} . Uvedomme si, že pri obrátení klávesnice sa nám z každej cifry stane 10 mínus daná cifra. Z čísla \overline{ABC} sa teda stane číslo $\overline{(10 - A)(10 - B)(10 - C)}$. Ak si obe tieto čísla zapíšeme v rozvinutom desiatkovom zápise, dostaneme, že číslo $(10 - A) \cdot 100 + (10 - B) \cdot 10 + (10 - C) = 1110 - 100A - 10B - C$ musí byť násobkom čísla $100A + 10B + C$. Vidíme, že nové číslo je rovné $1110 - \overline{ABC}$, z čoho vyplýva, že aj číslo 1110 musí byť násobkom \overline{ABC} . Teraz nám už stačí len vyskúšať všetky trojciferné delitele čísla 1110, a to sú 111, 185, 222, 370, 555. Keďže cifru 0 nemôžeme použiť, tak dostávame rovnaké 4 riešenia ako v predchádzajúcom riešení.