4. ÚLOHA

Opravovali: **Ondrej Králik** & **Samo Šandor** & **Mišo Vodička**

Najkrajšie riešenie: **Adam Horváth**

Počet riešení: **43**

ZADANIE

Herkules a Poarot majú šachovnicu veľkosti 2026 × 2026. Šerlok je figúrka, ktorá môže preskakovať iné figúrky a v jednom ťahu sa posunie vodorovne o párny počet polí alebo zvislo o nepárny počet polí. Inú figúrku vybije, ak skočí na pole, na ktorom daná figúrka stojí. Koľko najviac Šerlokov vieme umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Treba si v prvom rade uvedomiť, že riešenie takejto úlohy má dve časti. Musíme nájsť rozloženie nejakého počtu Šerlokov a ukázať, že naozaj spĺňa podmienky zo zadania, teda že sa žiadni dvaja neohrozujú. Taktiež musíme dokázať, že vyšší počet Šerlokov na šachovnicu tak, aby spĺňali podmienky, už umiestniť nevieme.

V tejto úlohe je asi jednoduchšie začať druhým z týchto krokov, a to stanovením a dokázaním horného ohraničenia (teoretického maxima) počtu Šerlokov. Pozrime sa na situáciu v riadkoch. Ak v danom riadku umiestnime Šerloka do akéhokoľvek nepárneho stĺpca, bude ohrozovať všetky políčka v tom riadku vzdialené o párny počet stĺpcov. To sú práve všetky políčka v nepárnych stĺpcoch tohto riadka, pretože súčet resp. rozdiel nepárneho a párneho čísla je nepárne číslo.

Takisto, ak Šerloka umiestnime v danom riadku do akéhokoľvek párneho stĺpca, bude ohrozovať všetky políčka v tom riadku vzdialené o párny počet stĺpcov. To sú práve všetky políčka v párnych stĺpcoch tohto riadka, pretože súčet resp. rozdiel párneho a párneho čísla je párne číslo. Ak by sa v tomto riadku nachádzal nejaký iný Šerlok, musel by byť buď na políčku v párnom stĺpci, alebo v nepárnom stĺpci. V oboch prípadoch by sa tento tretí Šerlok ohrozoval s niektorým so Šerlokov. Dokopy tak môžeme umiestniť najviac jedného Šerloka do párneho a najviac jedného do nepárneho stĺpca, teda najviac dvoch do riadku.

Situáciu si môžeme rovnako reprezentovať aj ofarbením políčok „šachovnicovo" na biele a čierne. Potom môže v každom riadku stáť najviac jeden Šerlok na bielom políčku a najviac jeden na čiernom políčku. Keďže každé políčko je buď biele, alebo čierne, môžeme do riadku umiestniť najviac dvoch Šerlokov.

Odtiaľ už dostávame horný odhad pre počet Šerlokov na šachovnici, ktorá má 2026 riadkov, každý s najviac dvoma Šerlokmi, teda Šerlokov je najviac $2 \cdot 2026 = 4052$.

Taktiež by sme sa mohli skúsiť pozrieť na podmienku v stĺpcoch a zamyslieť sa, či nám neohraničí počet Šerlokov ešte lepšie (t.j. vyjde nám menšie ohraničenie). Ak umiestnime Šerloka na políčko v ľubovoľnom riadku v danom stĺpci, ohrozuje políčka v tom stĺpci vzdialené o nepárny počet riadkov. To sú práve políčka v riadkoch s opačnou paritou, lebo pričítaním/odčítaním nepárneho čísla sa mení parita. Ľahko si teda rozmyslíme, že do jedného stĺpca vieme umiestniť 1013 Šerlokov (všetkých na políčka s rovnakou paritou) tak, aby sa žiadna dvojica neohrozovala. Rozdiel ich riadkov je totiž vždy rozdielom čísel s rovnakou paritou, a teda je vždy párny. Ak by sme ich do stĺpca umiestnili aspoň 1014, podľa Dirichletovho princípu by existovali aspoň dvaja v riadku s opačnou paritou, a teda by sa ohrozovali.

Teda najviac vieme do tabuľky umiestniť $1013 \cdot 2026$ Šerlokov. Keďže však $1013 \cdot 2026 > 2 \cdot 2026$, vidíme, že toto ohraničenie nám nepomôže viac ako ohraničenie cez riadky.

Teraz nám už stačí ukázať, že na šachovnicu naozaj vieme umiestniť 4052 Šerlokov tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali. Konštrukcia môže byť nasledovná: v nepárnych riadkoch umiestnime vždy Šerlokov do prvého a druhého stĺpca a v párnych riadkoch vždy do tretieho a štvrtého stĺpca.

	1	2	3	4	5	⋯	2024	2025	2026
1	Š	Š				⋯			
2			Š	Š		⋯			
3	Š	Š				⋯			
4			Š	Š		⋯			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
2023	Š	Š				⋯			
2024			Š	Š		⋯			
2025	Š	Š				⋯			
2026			Š	Š		⋯			

Dokážeme, že táto konštrukcia vyhovuje (v tabuľke je pozícia Šerloka označená ako Š) – veľmi nám pri tom pomôžu úvahy z dôkazu horného ohraničenia. Zrejme platí, že ľubovoľný Šerlok nemôže byť ohrozovaný Šerlokom, ktorý stojí v inom riadku aj stĺpci. Šerlokovia v rovnakých riadkoch sa neohrozujú, pretože sú v prvom a druhom stĺpci v nepárnych riadkoch a v treťom a štvrtom stĺpci v párnych riadkoch, čo sú v oboch prípadoch stĺpce s rozdielnou paritou. Šerlokovia v rovnakom stĺpci sa neohrozujú, keďže stoja v riadkoch rovnakej parity a každý z nich ohrozuje iba políčka vzdialené o nepárny počet riadkov, teda políčka v riadkoch rozdielnej parity.

KOMENTÁR

Nabudúce by sme vám kvôli prehľadnosti riešení odporúčali pri takomto type úloh jednoznačne oddeliť časť, v ktorej dokazujete horné ohraničenie, od časti, v ktorej opisujete konštrukciu. Pri konštrukcii je taktiež dobré vždy pridať aj ilustračný obrázok.

Ako si niektorí z vás všimli, úloha vďaka opísanej konštrukcii funguje úplne rovnako aj pre iné rozmery. Z tabuľky môžeme v konštrukcii bez ujmy odstrániť piaty až dvetisíc dvadsiaty šiesty stĺpec, a riešenie by fungovalo rovnako pre ľubovoľný počet stĺpcov väčší ako 4.