

6. ÚLOHA

Opravovali: **Nina Hudáková & Eva Krajčiová**

Najkrajšie riešenie: **Viktorija Boyko**

Počet riešení: **22**

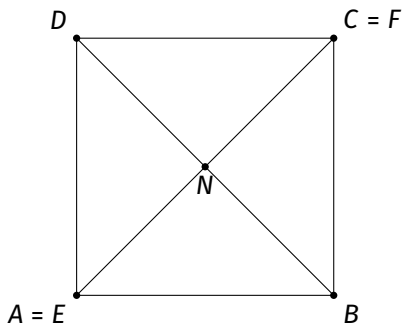
ZADANIE

Kachlička v Herkulovej kúpeľni má tvar štvorca $ABCD$. Na strane AB leží bod E a na strane BC bod F tak, že úsečky BE a BF sú rovnako dlhé. Bod N je päta kolmice z bodu B na priamku CE . Dokážte, že uhol DNF je pravý.

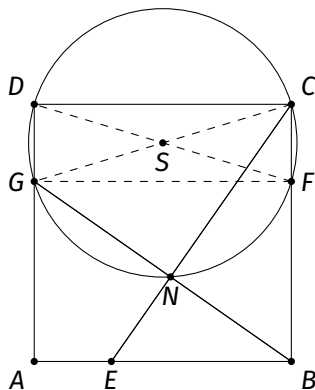
VZOROVÉ RIEŠENIE

Uvedomme si, že bod E môže ležať buď vnútri úsečky AB , alebo byť totožný s bodom A . Bod E nemôže byť totožný s bodom B , keďže vtedy nemôže spĺňať podmienku, že úsečky BE a BF sú rovnako dlhé. (Úsečka BE s dvoma totožnými koncovými bodmi totiž nie je definovaná.)

V prípade, že bod E splynie s bodom A , zároveň splynie aj bod F s C . Potom je úsečka EC uhlopriečka. Keďže v štvorci sú uhlopriečky na seba kolmé a z bodu D na úsečku EC vieme viesť práve jednu kolmicu, tak bod N ako päta tejto kolmice leží práve v priesečníku uhlopriečok. A keďže sú body D a F vrcholy štvorca, tak je uhol DNF v tomto prípade pravý.



Rozoberme prípad, že bod E je vnútri úsečky AB . Predĺžme si úsečku NB ; bod, v ktorom sa pretne s úsečkou AD , označme ako G .



Nech $|\sphericalangle ECB = \alpha|$. Potom z trojuholníka EBC vieme, že $|\sphericalangle CEB| = 90^\circ - \alpha$. Z pravouhlého trojuholníka ENB vyplýva, že $|\sphericalangle EBN| = \alpha$.

Môžeme si všimnúť, že trojuholník ABG je zhodný s trojuholníkom BCE podľa vety USU, keďže $|\sphericalangle ABG| = |\sphericalangle BCE| = \alpha$ a $|\sphericalangle GAB| = |\sphericalangle ECB| = 90^\circ$, pričom $|AB| = |CB|$ (strany štvorca).

Zo zhodnosti trojuholníkov vyplýva, že $|AG| = |BE|$. Keďže $|BE| = |BF|$, tak $|AG| = |BF|$. Z toho dostávame, že $|DG| = |CF|$. Keďže zároveň vieme, že DG a CF sú rovnobežné, pričom obe sú kolmé na DC , tak $DGFC$ je obdĺžnik. Teda mu možno opísať kružnicu, ktorej priemer je úsečka GC , respektíve DF .

Keďže $|\sphericalangle GNC| = 90^\circ$, tak bod N leží na Tálesovej kružnici nad priemerom GC . Tá je však zároveň Tálesovou kružnicou nad DF , a teda je uhol DNF pravý.

Zhrnutím dostávame, že pre všetky vyhovujúce polohy bodu E je uhol DNF pravý.

KOMENTÁR

Najčastejšou chybou v tejto úlohe bolo, že väčšina z vás zabudla rozobrať prípad, keď body A a E splynú, avšak zároveň používala pojmy ako obdĺžnik $GFCD$ alebo používala bod S , ktorý vznikol ako stred uhlopriečok obdĺžnika $GFCD$. Uvedomme si, že v situácii, keď by body A a E splynuli, splynuli by aj

body F s C a D s G , a teda by $GFCD$ nebol obdĺžnik, ale úsečka, a bod S by (ako prienik totožných CG a DF) taktiež nebol jeden bod, ale celá množina bodov, ktorá tvorí priamku GC . Vznikali tam aj nejaké ďalšie drobné nepresnosti, a tak sme za neukázanie variantu, keď A splynie s E , dávali dole po jednom bode.

Táto konkrétna situácia upozorňuje na dve časté všeobecnejšie nedorozumenia. Prvým je to, že dve rozličné pomenovania môžu referovať na jednu vec. Teda tak, ako sa dve čísla a a b môžu rovnať, tak môžu aj body A a E byť totožné. Druhým častým nedorozumením je nevyriešenie všetkých prípadov, respektíve nesprávne určenie podmienok. Ak napríklad v geometrii pracujeme s nejakými útvarmi, musíme sa uistiť, že vždy existujú, respektíve osobitne ošetriť prípady, kedy nie; inak riešenie nie je kompletne.