

1. ÚLOHA

Opravovali: **Karin Sabová & Oliver Semen**

Najkrajšie riešenia: **Viktoriia Boyko & Ema Kurucová**

Počet riešení: **45**

ZADANIE

Herkules a Poarot majú v byte loptičky s číslami od 1 po 20, každá loptička má na sebe práve jedno číslo. Chceli ich rozdeliť do 2 rovnako veľkých skupín tak, aby sa v skupinke nenachádzala loptička so súčtom čísel dvoch rôznych iných loptičiek z tej istej skupinky. Môže sa im to podariť? Ak áno, uveďte príklad, ak nie, vysvetlite prečo.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Pri riešení začneme rozdeľovaním najmenších čísel, ktorých súčty ovplyvňujú väčšie čísla. Budeme teda riešiť dva prípady:

- **Loptičky s číslami 1 a 2 sú v rovnakej skupine:**

Ak by boli spolu, číslo 3 by s nimi byť nemohlo, pretože $1 + 2 = 3$. Preto ho dáme do druhej skupiny. Teraz sa pozrieme na číslo 4. Ak by bolo 4 v skupine s číslom 3, číslo $7 = 4 + 3$ musíme dať k číslam 1 a 2. Ďalej číslo 5 dáme k číslu 3, keďže $2 + 5 = 7$. Máme tak skupiny $\{1, 2, 7\}$ a $\{3, 4, 5\}$. Číslo 9 ale teraz nevieme nikam zaradiť, keďže $9 = 4 + 5$ a zároveň $9 = 2 + 7$.

Ak by sme dali 4 k číslam 1 a 2, čísla $5 = 1 + 4$ a $6 = 2 + 4$ musíme dať do skupiny k 3. Číslo $9 = 3 + 6$ tak pridáme k 1 a 2. Tým dostávame skupiny $\{1, 2, 4, 9\}$ a $\{3, 5, 6\}$ a zistíme, že číslo $11 = 5 + 6 = 2 + 9$ nevieme zaradiť.

- **Loptičky s číslami 1 a 2 sú v rôznych skupinách:**

Teraz rozhodujeme, kam patrí číslo 3. Ak je v skupine s číslom 1, potom $4 = 1 + 3$ musí byť pri 2 a $6 = 2 + 4$ musí byť pri 1. Ďalej $7 = 1 + 6$ musíme pridať k 2, čím sa dostaneme k skupinám $\{1, 3, 6\}$ a $\{2, 4, 7\}$, teda opäť nevieme zaradiť číslo 9.

Ak by bolo číslo 3 v skupine s číslom 2, tak $5 = 2 + 3$ musí byť v skupine s 1, potom $6 = 1 + 5$ musí byť s 2 a $8 = 2 + 6$ s 1. Máme tak skupiny $\{1, 3, 8\}$ a $\{2, 3, 6\}$, opäť teda nemáme kam zaradiť číslo 9.

Keďže sme preskúmali všetky možnosti rozdelenia najmenších čísel a vždy sme narazili na spor, vyplýva z toho, že požadované rozdelenie neexistuje. Loptičky teda nie je možné rozdeliť do dvoch skupín po 10 tak, aby v žiadnej skupine nebolo číslo, ktoré je súčtom dvoch iných čísel z tej istej skupiny.

INÉ RIEŠENIE

Keďže chceme loptičky rozdeliť do rovnako veľkých skupín, tak ich bude v každej skupine 10. Opäť rozoberme dve možnosti:

- **Loptičky s číslami 1 a 2 sú v rovnakej skupine**

Potom sa v tejto skupine nesmú nachádzať žiadne dve čísla spomedzi čísel 3 až 20 s rozdielom 1 alebo 2. To znamená, že tu môže byť najviac jedna tretia loptička, a teda ich vieme pridať ešte najviac $18 : 3 = 6$. Dokopy tak vieme mať v tejto skupine najviac $2 + 6 = 8$ loptičiek, čím sme nedocielili žiadané rozdelenie.

- **Loptičky s číslami 1 a 2 sú v rôznych skupinách**

Pozrime sa najprv na čísla 3 až 18. Vieme, že skupina s číslom 2 nesmie obsahovať žiadne dve iné čísla s rozdielom 2. Ak by spomedzi čísel 3 až 18 obsahovala dve čísla s rozdielom 1, tak by nemohla obsahovať ani jedno z týchto čísel zväčšené o 2, keďže už obsahuje číslo 2. Potom ale musí tieto dve čísla, ktorých rozdiel je 1, obsahovať skupina s číslom 1, čo sa nesmie stať, keďže sčítaním 1 a menšieho čísla dostaneme to väčšie číslo.

Tým zisťujeme, že skupina s číslom 2 môže obsahovať opäť najviac každú tretiu loptičku z loptičiek s číslom 3 až 18, dokopy teda najviac 6 loptičiek. Ak by potom aj obsahovala loptičky s číslami 19 a 20, stále by sa v nej mohlo nachádzať najviac $1 + 6 + 2 = 9$ loptičiek, čo nestačí. Ani v tejto možnosti teda nevieme loptičky vhodne rozdeliť.

Keďže sa nám nepodarilo rozdeliť loptičky v žiadnej možnosti, tak hľadané

rozdelenie neexistuje a Herkulovi a Poarotovi sa ich cieľ nemôže podariť dosiahnuť.

KOMENTÁR

Väčšina z vás riešila úlohu podobne ako naše prvé riešenie. Viacerí ste ale vyskúšali len jednu konkrétnu stratégiu rozdeľovania loptičiek – hlavne takú, kde vždy dáme do prvej skupiny najbližšiu loptičku, ktorú môžeme. To je určite dobrý začiatok, pomocou ktorého sa môžeme dovŕiť, že to asi nepôjde. Rozhodne to ale nie je korektný dôkaz. Ako predsa vieme, že vynechanie niektorej loptičky nedosiahne vyhovujúce rozdelenie? Mohlo by sa predsa stať, že vynechanie tejto jednej loptičky nám umožní do skupiny rozdeliť viacero loptičiek s väčším číslom.