

3. ÚLOHA

Opravovali: **Števo Vašak & Jano Richnavský**

Najkrajšie riešenia: **Hana Lascsáková & Richard Futáš**

Počet riešení: **45**

ZADANIE

Herkules a Poarot kachličkujú kúpeľňu tvaru mriežky 8×8 políčok, v ktorej sú postupne po riadkoch vpísané čísla od 1 do 64. Herkules chcel do kúpeľne umiestniť 10 kachličiek v tvare trimín rovnakého typu tak, aby súčet nepokrytých čísel bol deliteľný 3. Vie to urobiť, ak

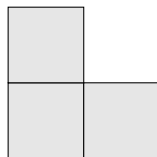
- a. má k dispozícii triminá typu L,
- b. má k dispozícii triminá typu I?

Triminá vieme v oboch prípadoch ľubovoľne otáčať.

VZOROVÉ RIEŠENIE

S triminami typu L to ide napríklad ako na obrázku:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64



L



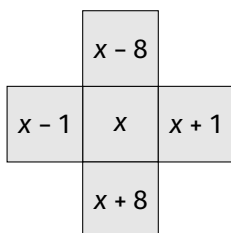
I

Tu už riešenie prípadu a) môže skončiť. Úloha sa nás pýta, či Herkules vie kúpeľňu vyplniť, a jeden takýto príklad dokazuje, že áno.

Mnoho riešiteľov sa však pokúsilo riešiť prvú časť podrobnejšie, ako bolo nutné, čo často viedlo k rôznym chybám. Preto sme sa rozhodli uviesť pre časti a) a b) spoločný postup riešenia. Rozoberať časť a) týmto spôsobom však nebolo nutné.

Najprv si sčítame hodnotu všetkých políčok od 1 do 64. Ich súčet je 2080. Všimnime si, že po delení číslom 3 dostaneme zvyšok 1, teda toto číslo nie je deliteľné číslom 3.

Trik, ktorý využijeme, spočíva v tom, že si určíme, aký zvyšok po delení číslom 3 nám kachlička zakryje. Najprv vykonáme úvahu pre kachličku typu L. Tú môžeme umiestniť 4 rôznymi spôsobmi. Ak si označíme číslo v strednom políčku ako x , tak bez ohľadu na to, kam kachličku umiestnime, políčko napravo od neho bude mať hodnotu o 1 menšiu a políčko napravo o 1 väčšiu (keďže čísla sú v tabuľke vypísané postupne). Nad týmto políčkom bude číslo o 8 menšie, keďže v každom riadku je práve 8 čísel. Podobne, pod políčkom bude číslo o 8 väčšie.



Pre každé umiestnenie kachličky si teraz môžeme napísať a zjednodušiť súčet:

- $\Gamma \rightarrow x, x + 1, x + 8$, súčet $x + (x + 1) + (x + 8) = 3 \cdot x + 9$
- $\perp \rightarrow x, x - 1, x - 8$, súčet $x + (x - 1) + (x - 8) = 3 \cdot x - 9$
- $\lrcorner \rightarrow x, x - 1, x + 8$, súčet $x + (x - 1) + (x + 8) = 3 \cdot x + 7$
- $\llcorner \rightarrow x, x - 8, x + 1$, súčet $x + (x - 8) + (x + 1) = 3 \cdot x - 7$

Všimnime si, že každá kachlička má v sebe člen $3 \cdot x$. Takýto výraz je určite deliteľný číslom 3 bezo zvyšku.

V prvých dvoch riadkoch máme číslo 9, teda aj tento člen bude v týchto prípadoch deliteľný číslom 3. Keďže v prvých dvoch riadkoch je celý súčet deliteľný číslom 3, vyplýva z toho, že keď použijeme takú kachličku, odoberieme z celkového súčtu násobok čísla 3. Zvyšok celkového súčtu nepokrytých kachličiek sa preto v týchto prípadoch nezmení.

Iná situácia nastane v treťom prípade – tam máme člen $+7$. To dáva po delení číslom 3 zvyšok 1. To znamená, že keď použijeme takúto kachličku, od celkového súčtu nepokrytých kachličiek odčítame násobok čísla 3 zvýšený o 1, teda celkový zvyšok tabuľky o 1 znížime.

Podobne funguje aj štvrtý prípad – tam máme ale člen -7 . To znamená, že z celkového súčtu odoberieme násobok čísla 3 znížený o zvyšok 1, teda v skutočnosti násobok čísla 3 zvýšený o 2. Teda celkový zvyšok súčtu nepokrytých políčok takáto kachlička zníži o 2.

Keďže počiatočný súčet čísel v tabuľke dáva po delení číslom 3 zvyšok 1, stačí nám použiť práve jednu kachličku 3. typu a zvyšných 9 kachličiek môžeme otočiť ako v 1. alebo 2. type. Tým si zaručíme, že prvá kachlička nám zmení zvyšok zvyšných políčok na 0 a ďalšie kachličky, ktoré majú už len súčet deliteľný číslom 3, zvyšok nemenia. Dostaneme takto napríklad obrázok uvedený na začiatku riešenia.

Veľmi podobnú úvahu môžeme vykonať aj pre prípad *b*):

- $I \rightarrow x - 8, x, x + 8$, súčet $x + (x - 8) + (x + 8) = 3 \cdot x$

- $- \rightarrow x - 1, x, x + 1$, súčet $x + (x - 1) + (x + 1) = 3 \cdot x$

Vidíme, že bez ohľadu na to, ako umiestnime kachličku tvaru *I*, vždy pokryje súčet čísel deliteľný číslom 3, teda zvyšok zvyšných políčok sa po delení číslom 3 nemení. Tým sme veľmi jednoducho dokázali, že Herkules nevie kúpeľňu vykachličkovať kachličkami typu *I* podľa požiadavky.