

## 4. ÚLOHA

Opravovali: **Janka Urbánová & Evka Krajčiová**

Najkrajšie riešenia: **Richard Semanišin & Marko Vasil'**

Počet riešení: **47**

### ZADANIE

Herkulovi sa sníval sen, v ktorom sa snaží poraziť mocnú hydra. Môže spraviť jeden z nasledujúcich útokov:

- Seknutie: Odsekne hydre práve 2 hlavy. Ak to však nie sú jej posledné dve hlavy, tak jej ďalších 9 dorastie. Nedá sa použiť, ak má hydra len 1 hlavu.
  - Ovalenie: Hydre odpadne po tomto útoku presne 7 hláv. Nedá sa použiť, ak má hydra menej ako 7 hláv.
  - Šľahnutie: Môže ho vykonať, len ak má hydra párny počet hláv, a odsekne jej to polovicu z nich.
- a. Vie Herkules hydre postupne zožrať všetky hlavy, ak ich má na začiatku 2026? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?
- b. Vie Herkules hydre postupne zožrať všetky hlavy, ak ich má na začiatku 2027? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?

### VZOROVÉ RIEŠENIE

Uvedomme si, že ak Herkules vo svojom (neposlednom) útoku použije seknutie, tak sa počet hláv hydry zvýši o  $-2+9 = 7$ , ak použije ovalenie, tak sa o 7 zníži. To potom znamená, že ani jeden z týchto spôsobov nemení zvyšok počtu hláv hydry po delení číslom 7. Teda jediný spôsob útoku, ktorý by mohol meniť zvyšok hláv po delení 7 je (okrem posledného seknutia) šľahnutie, pri ktorom sa počet hláv zmenší na polovicu.

(Poznámka : Zvyšok po delení 7 nazývame tradične modulom 7, skrátene mod 7. To, že dve čísla  $a$  a  $b$  majú rovnaké modulo 7, zapíšeme  $a \equiv b$

mod 7. Pre riešenie tieto formy zápisov nie sú potrebné, ale všeobecne sú veľmi užitočné svojou prehľadnosťou, najmä pri komplexnejších úlohách využívajúcich deliteľnosť.)

Nech Herkules hydry zabije. Podľa jeho posledného útoku rozoberme, aké počty hláv mohla mať hydra na začiatku:

- Šľahnutie.

Teda pred ním mala hydra  $2 \cdot 0 = 0$  hláv.

Táto situácia teda nemohla nastať, keďže potom by aj predchádzajúci ťah musel byť posledným (po jeho konci má hydra 0 hláv). Šľahnutie posledným útokom teda byť nemôže.

- Ovalenie.

Teda pred ním mala hydra  $7 \equiv 0 \pmod{7}$  hláv (počet, ktorý po delení číslom 7 dáva zvyšok 0).

Teda ak Herkules hydry zabil, pričom jeho posledný útok bolo ovalenie, hydra musela mať 0 hláv modulo 7 (počet, ktorý po delení číslom 7 dáva zvyšok 0).

- Seknutie.

Teda pred ním mala hydra  $2 \equiv 2 \pmod{7}$  (počet so zvyškom 2 po delení 7) hláv.

Jediný útok, ktorý by mohol meniť zvyšok hláv po delení 7 je šľahnutie. Ak však mala hydra po nejakom šľahnutí  $0 \pmod{7}$  hláv, pred šľahnutím mala  $0 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{7}$ , zachovávajúc zvyšok po delení číslom 7.

- Ak však mala hydra po nejakom šľahnutí  $2 \pmod{7}$  hláv, pred šľahnutím mala  $0 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7}$  (počet so zvyškom 4 po delení 7).
- Ak však mala hydra po nejakom šľahnutí  $4 \pmod{7}$  hláv (inak povedané so zvyškom 4), pred šľahnutím mala  $4 \cdot 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$  (počet hláv so zvyškom 1 po delení 7).
- Ak však mala hydra po nejakom šľahnutí  $1 \pmod{7}$  hláv (inak povedané so zvyškom 1), pred šľahnutím mala  $1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$  (počet so zvyškom 2 po delení 7).

Uvedomme si, že keďže sa zvyšky zacyklili, tak ak Herkules hydra zabil, pričom jeho posledný útok bolo seknutie, hydra mohla mať jedine hlavy so zvyškom 1, 2 alebo 4.

Teda celkovo ak Herkules hydra zabil, mohla mať jedine hlavy so zvyškom 0, ak by jeho posledný útok bolo ovalenie, alebo 1, 2, 4, ak by jeho posledný útok bolo seknutie.

- a. Nech má hydra 2026 hláv. Keďže  $2026 = 289 \cdot 7 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$  (počet hláv so zvyškom 3 po delení 7), tak hydra zabiť Herkules po konečnom počte útokov nemôže.
- b. Nech má hydra 2027 hláv. ( $2027 = 289 \cdot 7 + 4 \equiv 4 \pmod{7}$ ) Ukážme, že existuje spôsob, ako má Herkules útočiť, aby hydra umrela:

Herkules najprv hydra 289-krát ovalí, čím ju pripraví o  $289 \cdot 7 = 2023$  hláv a zostanú jej 4. Následne Herkules využije útok šľahnutie, po ktorom jej ostanú  $\frac{4}{2} = 2$  hlavy, o ktoré ju pripraví seknutím, a teda ju porazí.

*(Poznámka: Táto skúška je nutná, keďže v riešení tvrdíme iba, že ak sa dá hydra poraziť, tak musela mať počet hláv so zvyškom 0, 1, 2 alebo 4. Nie to, že ak má počet hláv s uvedenými zvyškami, tak sa poraziť dá. Toto tvrdenie dokonca ani nie je pravdivé, keďže pre hydra s 1 hlavou, teda so zvyškom 1, nie je možné urobiť žiaden útok, a teda ju ani zabiť.)*

## KOMENTÁR

Vo vašich riešeniach sa celkovo vyskytovali dva hlavné problémy:

### **Vytvorenie nie všeobecného dôkazu**

Ak počítate úlohu, kde treba zistiť, či je nejaká situácia možná alebo nie, buď musíte dokázať, že nie je, alebo ukázať aspoň jednu konštrukciu, kedy nastane. Teda dôkazom pre podúlohu, ktorá ide (ako napríklad tu podúloha b.) je samotný príklad toho, ako by Herkules dokázal hydra zabiť.

Problém však často nastal pri podúlohe a.), kde bolo potrebné dokázať, že Herkules nedokáže hydra zabiť žiadnym spôsobom. Jeden, dva, ani tri príklady, ktoré vám nevyšli, nie sú dôkazom, keďže ešte vždy existujú mnohé iné spôsoby, ktoré by možno vyšli, iba ste na nich nenatrafili.

Taktiež sa za korektný dôkaz nepovažuje, ak povieť, že „sa niečo vždy stane“, ak to nie je základný matematický poznatok, ako napríklad „párne číslo je deliteľné dvojkou“. Tvrdenia špecifické pre úlohu, ako napríklad „vždy na konci ostali 3 hlavy“, však nie sú zjavné a veľkou časťou úlohy je ich dokázať.

### ***Delenie zvyškov***

Druhým vyskytujúcim sa problémom bolo delenie zvyškov (pri dokazovaní cyklov). To však nie je v modulárnej aritmetike priamo definované.

Pozrime sa napríklad na „čísla“  $\frac{1}{2} \pmod{2}$  a  $\frac{0}{2} \pmod{2}$ . Platí  $0 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{2}$ , teda by malo platiť  $\frac{0}{2} \equiv 0 \pmod{2}$ . Avšak zároveň platí  $1 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{2}$ , a teda by rovnako malo platiť aj  $\frac{0}{2} \equiv 1 \pmod{2}$ . Keďže  $0 \not\equiv 1 \pmod{2}$  a  $\frac{0}{2}$  nemôže mať dva výsledky (ani  $\frac{1}{2}$  nemať žiadny), tak delenie dvoma nie je na module 2 definované.

Ako ste si však isto mnohí všimli, takéto nejasnosti v konkrétne „delení“ dvoma pri module 7 nenastávali, každé malo práve jediný možný výsledok, čo platí vďaka tomu, že 2 a 7 sú nesúdeliteľné. V tomto komentári tento jav nejdeme rozoberať, ak vás však zaujíma, prečo sa tak deje, odporúčame si pozrieť niečo o *modulárnej inverzii*.

Len odvolávanie sa na výsledky delenia zvyškov teda nie je v riešení (ak teda neuvediete, že tak môžete robiť vzhľadom na nesúdeliteľnosť 2 a 7) postačujúce, a teda bolo penalizované strhnutím bodu. Ak ste však delenie nejakým spôsobom obišli, Vaše riešenie sme hodnotili plným počtom.