3. ÚLOHA

Opravovali: **Sarka Klopštock** & **Timka Szöllösová**

Najkrajšie riešenie: **Theo Šuchaň**

Počet riešení: **38**

ZADANIE

Finálny trik kúzelníka Ľuba spočíva v tom, že vždy poprosí niekoho v publiku, aby mu napísal na papier hocikoľko kladných celých čísel. Ľubo tvrdí, že si potom z nich vždy dokáže vybrať trojicu čísel, ktorých súčet je deliteľný tromi. Pri akom najmenšom počte čísel si Ľubo môže byť istý, že to dokáže?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Kúzelník vyberá čísla aby boli deliteľné tromi, a preto sa pozrieme, ako ich vieme rozdeliť do troch skupín podľa zvyšku, ktorý po delení tromi dostaneme: buď nezvýši nič (0), zvýši 1, alebo zvýšia 2.

Každé číslo je teda nejaký "základ" deliteľný tromi plus jeho zvyšok po delení tromi, napríklad pre číslo $7 = 2 \cdot 3 + 1$ je $2 \cdot 3 = 6$ tento základ a 1 je zvyšok. Tým pádom, keď nás zaujíma, či je súčet nejakých dvoch čísel deliteľný tromi, tak sa na ich základy ani nemusíme pozerať, pretože deliteľné trojkou ostanú aj po sčítaní. Čiže musíme len skontrolovať, či sa zvyšky sčítajú tak, aby boli deliteľné trojkou. Napríklad 2 a 1 sa nám sčítajú na 3, a tak celý takýto súčet bude deliteľný tromi, napríklad pri $7 + 14 = (2 \cdot 3 + 1) + (4 \cdot 3 + 2) = 6 \cdot 3 + 3 = 7 \cdot 3$. Naopak, ak by sme sčítali dve čísla so zvyškami 1 a 1, tak sa nám sčítajú len na 2, a teda celkový súčet nielenže nie je deliteľný 3, ale vieme rovno povedať, že zvyšok po delení bude 2 (keďže naše základy deliteľné tromi zvyšky meniť nebudú), tak ako napríklad pri $13 + 22 = (4 \cdot 3 + 1) + (7 \cdot 3 + 1) = 11 \cdot 3 + 2$.

Pri súčte troch čísel bude toto pravidlo fungovať rovnako a teda Ľubovi stačí nájsť takú trojicu, kde sú buď všetky tri čísla z rovnakej skupiny (napríklad tri jednotky dajú súčet 3), alebo je každé číslo z inej skupiny ($0 + 1 + 2 = 3$). V oboch prípadoch je výsledok deliteľný tromi a ľahko sa dá overiť, že v žiadnej inej kombinácii zvyškov súčet tromi deliteľný nebude.

Zjavne potrebujeme aspoň tri čísla, no napríklad kombinácia zvyškov 1, 1 a 2 nesedí. Pri štyroch číslach by mohol divák napísať napríklad dve čísla so zvyškom 1 a dve čísla so zvyškom 2, a vtedy by tiež žiadna trojica nefungovala.

Pri piatich číslach určite buď divák napísal trojicu rovnakých zvyškov, alebo má z každého zvyšku maximálne dve čísla. V prvom prípade Ľubo jednoducho vyberie trojicu čísel s rovnakými zvyškami. V druhom prípade prídeme na to, že určite máme aspoň jedno číslo s každým z troch možných zvyškov. Ľubo teda zas vyberie trojicu čísel s týmito rôznymi zvyškami. Najmenší počet čísel, pri ktorom si Ľubo môže byť istý, že dokáže spraviť svoj finálny trik, je 5.